

Fachabitur 2016 Mathematik NT Stochastik S I

Die Glocken-Apotheke bietet ihren erkälteten Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an, wobei jeder entsprechende Kunde mindestens eines dieser Produkte erwirbt. Im Folgenden werden nur diese drei Medikamente betrachtet.

Aus Erfahrung weiß der Apotheker, dass unabhängig voneinander 25% der Kunden einen Hustensaft erwerben und jeder fünfte Kunde Kopfschmerztabletten kauft. Kunden kaufen zu 60% auch ein Nasenspray, wenn sie mindestens eines der anderen Medikamente erwerben. Der Einkauf eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 7 Elementarereignisse.

[Teilergebnis: $P(\{H\overline{K}N\}) = 0,12$]

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft keine Kopfschmerztabletten.“

E_2 : „Es wird Nasenspray und mindestens ein weiteres Produkt gekauft.“

$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P(E_3)$.

Der Apotheker bietet seinen Kunden nur Hustensaft der Marken A und B an. Von 500 Hustensaftkäufern entscheiden sich 400 für den Hustensaft A . Bei 280 der Kunden, die Hustensaft A kaufen, tritt eine Verbesserung der Symptome ein. Von den Käufern der Hustensaftmarke B geben 30 an, dass keine Verbesserung der Symptome auftritt.

Teilaufgabe 1.3.1 (5 BE)

Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, überprüfen Sie, ob die Ereignisse

A : „Ein Kunde kauft Hustensaft der Marke A .“ und

V : „Es tritt eine Verbesserung der Symptome auf.“

stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 1.3.2 (2 BE)

Berechnen Sie $P(\overline{A} \cup V)$.

Ein Pharmakonzern führt eine Untersuchung über die Wirksamkeit des Grippemittels G durch. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tage bis zur vollständigen Genesung bei Einnahme des Medikaments G an. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	a	$b - 2a$	0,4	b	0,15	$2a$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Parameter a und b , wenn die vollständige Genesung im Durchschnitt nach 6,6 Tagen eintritt.

[Teilergebnis: $a = 0,05$]

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Berechnen Sie mit den Werten von a und b aus Teilaufgabe 2.1 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus Teilaufgabe 2.1 die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse auf 5 Nachkommastellen gerundet:

E_4 : „Von 20 Patienten sind nach 4 Tagen genau 4 vollständig genesen.“

E_5 : „Von 100 Patienten tritt bei höchstens 30 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

E_6 : „Von 50 Patienten tritt bei mindestens 10 aber weniger als 20 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

Der Pharmakonzern behauptet, dass bei höchstens 15% der Patienten nach der Einnahme des Medikaments G Nebenwirkungen auftreten. Der Apotheker glaubt jedoch, dass der Anteil höher ist (Gegenhypothese). Deshalb führt er eine Befragung bei 200 seiner Kunden durch, die das Medikament G genommen haben.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn bei 35 der befragten Kunden Nebenwirkungen auftreten? Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung**Teilaufgabe 1.1** (5 BE)

Die Glocken-Apotheke bietet ihren erkälteten Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an, wobei jeder entsprechende Kunde mindestens eines dieser

Produkte erwirbt. Im Folgenden werden nur diese drei Medikamente betrachtet.

Aus Erfahrung weiß der Apotheker, dass unabhängig voneinander 25% der Kunden einen Hustensaft erwerben und jeder fünfte Kunde Kopfschmerztabletten kauft. Kunden kaufen zu 60% auch ein Nasenspray, wenn sie mindestens eines der anderen Medikamente erwerben. Der Einkauf eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 7 Elementarereignisse.

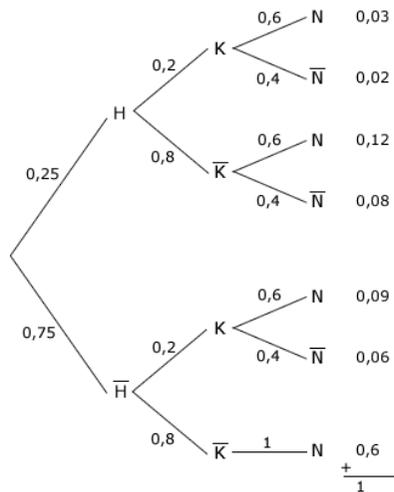
[Teilergebnis: $P(\{H \bar{K} N\}) = 0,12$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1***Baumdiagramm erstellen***

$$P(H) = 25\% = 0,25$$

$$P(K) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P(N) = 60\% = 0,6$$

**Teilaufgabe 1.2** (5 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft keine Kopfschmerztabletten.“

E_2 : „Es wird Nasenspray und mindestens ein weiteres Produkt gekauft.“

$$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P(E_3)$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2**Ereignis in Mengenschreibweise**

$$E_1 = \{H \bar{K} N, H \bar{K} \bar{N}, \bar{H} \bar{K} N\}$$

$$E_2 = \{H K N, H \bar{K} N, \bar{H} K N\}$$

$$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2} = E_1 \cap \bar{E}_2 = \{H \bar{K} \bar{N}, \bar{H} \bar{K} N\}$$

Ereignis beschreiben

E_3 : „Ein Kunde kauft entweder Hustensaft oder Nasenspray“

Wahrscheinlichkeit

$$P(E_3) = 0,08 + 0,6 = 0,68$$

Teilaufgabe 1.3.1 (5 BE)

Der Apotheker bietet seinen Kunden nur Hustensaft der Marken A und B an. Von 500 Hustensaftkäufern entscheiden sich 400 für den Hustensaft A . Bei 280 der Kunden, die Hustensaft A kaufen, tritt eine Verbesserung der Symptome ein. Von den Käufern der Hustensaftmarke B geben 30 an, dass keine Verbesserung der Symptome auftritt.

Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, überprüfen Sie, ob die Ereignisse

A : „Ein Kunde kauft Hustensaft der Marke A .“ und

V : „Es tritt eine Verbesserung der Symptome auf.“

stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3.1**Vierfeldertafel für zwei Ereignisse**

	V	\bar{V}	Σ
A	$\frac{280}{500} = 0,56$	0,24	$\frac{4}{5} = 0,8$
\bar{A}	0,14	$\frac{30}{500} = 0,06$	0,2
Σ	0,7	0,3	1

oder

	A	\bar{A}	Σ
V	$\frac{280}{500}$	$\frac{70}{500}$	$\frac{350}{500}$
\bar{V}	$\frac{120}{500}$	$\frac{30}{500}$	$\frac{150}{500}$
Σ	$\frac{400}{500}$	$\frac{100}{500}$	1

Stochastische UnabhängigkeitEs soll überprüft werden, ob: $P(V) \cdot P(A) = P(V \cap A)$

$$0,7 \cdot 0,8 = 0,56$$

 $0,56 = 0,56 \Rightarrow V$ und A sind stochastisch unabhängig
Interpretation: A und B wirken gleich gutOder: kein Zusammenhang zwischen der Einnahme von A und Verbesserung der Symptome**Teilaufgabe 1.3.2** (2 BE)Berechnen Sie $P(\bar{A} \cup V)$.**Lösung zu Teilaufgabe 1.3.2****Wahrscheinlichkeit**

Vierfeldertafel aus 1.2:

	V	\bar{V}	Σ
A	0,56	0,24	0,8
\bar{A}	0,14	0,06	0,2
Σ	0,7	0,3	1

$$P(\bar{A} \cup V) = P(\bar{A}) + P(V) - P(\bar{A} \cap V)$$

$$P(\bar{A} \cap V) = 0,2 + 0,7 - 0,14 = 0,76$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Ein Pharmakonzern führt eine Untersuchung über die Wirksamkeit des Grippemittels G durch. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tage bis zur vollständigen Genesung bei Einnahme des Medikaments G an. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	a	$b-2a$	0,4	b	0,15	$2a$

Bestimmen Sie die Parameter a und b , wenn die vollständige Genesung im Durchschnitt nach 6,6 Tagen eintritt.

[Teilergebnis: $a = 0,05$]**Lösung zu Teilaufgabe 2.1****Erwartungswert einer Zufallsgröße**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 1 &= a + b - 2a + 0,4 + b + 0,15 + 2a \\ 0,45 &= a + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad 6,6 &= 4a + 5(b-2a) + 6 \cdot 0,4 + 7b + 8 \cdot 0,15 + 9 \cdot 2a \\ 3 &= 12a + 12b \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem lösen:

$$\text{II} - 6 \cdot \text{I}: \quad 0,3 = 6a \quad \Rightarrow \quad a = 0,05$$

$$a = 0,05 \text{ in I einsetzen:} \quad 0,4 = 2b \quad \Rightarrow \quad b = 0,2$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Berechnen Sie mit den Werten von a und b aus Teilaufgabe 2.1 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Standardabweichung einer Zufallsgröße

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	0,05	0,1	0,4	0,2	0,15	0,1

$$\mu = 6,6$$

$$E(X^2) = 16 \cdot 0,05 + 25 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,4 + 49 \cdot 0,2 + 64 \cdot 0,15 + 81 \cdot 0,1$$

$$E(X^2) = 45,2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 45,2 - 6,6^2 = 1,64$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx 1,28$$

Wahrscheinlichkeit

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(5,32 < X < 7,88)$$

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus Teilaufgabe 2.1 die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse auf 5 Nachkommastellen gerundet:

E_4 : „Von 20 Patienten sind nach 4 Tagen genau 4 vollständig genesen.“

E_5 : „Von 100 Patienten tritt bei höchstens 30 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

E_6 : „Von 50 Patienten tritt bei mindestens 10 aber weniger als 20 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Binomialverteilung

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	0,05	0,1	0,4	0,2	0,15	0,1

$$P(E_4) = P_{0,05}^{20}(X = 4) \stackrel{\text{TW}}{=} 0,01333$$

$$P(E_5) = P_{0,2}^{100}(X \leq 30) \stackrel{\text{TW}}{=} 0,99394$$

$$P(E_6) = P_{0,2}^{50}(10 \leq X < 20) = P_{0,2}^{50}(X \leq 19) - P_{0,2}^{50}(X \leq 9) \stackrel{\text{TW}}{=} 0,99907 - 0,44374 = 0,55533$$

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Der Pharmakonzern behauptet, dass bei höchstens 15% der Patienten nach der Einnahme des Medikaments G Nebenwirkungen auftreten. Der Apotheker glaubt jedoch, dass der Anteil höher ist (Gegenhypothese). Deshalb führt er eine Befragung bei 200 seiner Kunden durch, die das Medikament G genommen haben.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

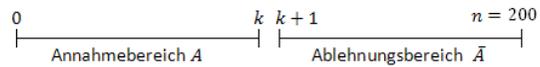
Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Hypothesentest - Fehler erster Art

T : Anzahl der Patienten, bei denen Nebenwirkungen auftreten von 200

$$H_0 : p_0 \leq 0,15$$

$$H_1 : p_1 > 0,15$$

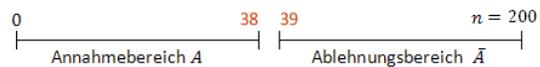


$$P_{0,15}^{200}(T \geq k+1) \leq 0,05$$

$$1 - P_{0,15}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$$

$$0,95 \leq P_{0,15}^{200}(T \leq k)$$

Tafelwerk: $k \geq 38$



$$\bar{A} = \{39, 40, \dots, 200\}$$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn bei 35 der befragten Kunden Nebenwirkungen auftreten? Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

$$35 \in A \Rightarrow H_0 \text{ wird angenommen}$$

Fehler 2. Art:

H_0 wird angenommen, obwohl falsch, d. h. man nimmt an, dass bei höchstens 15% der Patienten Nebenwirkungen auftreten, obwohl es in Wirklichkeit mehr sind.