Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Die Zufallsvariable X entspricht der Anzahl der positiven Dopingproben im geplanten Test. X kann als binomialverteilt angenommen werden, falls das Zufallsexperiment nur zwei Ausgänge hat (hier: positiv oder negativ) und sich die Wahrscheinlichkeiten für beide Ausgänge über das gesamte Experiment nicht ändern (hier: $p_{\text{positiv}} = 0{,}003$ und $p_{\text{negativ}} = 0{,}997$).

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

In der abgebildeten Rechnung wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass sich unter den 5 000 durchgeführten Dopingtests zwischen 10 und 19 positive Proben befinden.
Die Wahrscheinlichkeit, unter den 5 000 durchgeführten Tests genau k positive Ergebnisse zu erhalten, entspricht einer Bernoulli-Kette der Länge 5 000 mit $p = 0{,}003$ und $q = 0{,}997$:

$$P(X = k) = \binom{5\,000}{k} \cdot 0{,}003^k \cdot 0{,}997^{5\,000-k}$$

Diese Einzelwahrscheinlichkeiten werden von $k = 10$ bis $k = 19$ aufaddiert:

$$\sum_{i=10}^{19} \binom{5\,000}{i} \cdot 0{,}003^i \cdot 0{,}997^{5\,000-i}$$

Damit werden alle Fälle untersucht, in denen es mindestens 10, aber höchstens 19 positive Proben gibt. Es ergibt sich ein Wert von etwa 80,6 %.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Das Signifikanzniveau eines Hypothesentests gibt die Größe des α-Fehlers an, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese zwar wahr ist, aber abgelehnt wird. Damit gilt für die in der Aufgabe beschriebenen Tests:

Französisches Labor

$p_0 = 0{,}01$; $p_1 < 0{,}01$
Entscheidung für H_0 für $X \geq k$
Entscheidung für H_1 für $X < k$

$$P(\alpha) \leq 0{,}04$$
$$P(X < k) \leq 0{,}04$$

$$\mathrm{F}(1\,000; 0{,}01; k-1) \leq 0{,}04$$
$$\Rightarrow k = 5$$

Annahmebereich H_0:
$An = \{5, 6, \ldots, 999, 1\,000\}$

Heidelberger Molekularbiologe

$p_0 = 0{,}003$; $p_1 > 0{,}003$
Entscheidung für H_0 für $X \leq k$
Entscheidung für H_1 für $X > k$

$$P(\alpha) \leq 0{,}04$$
$$P(X > k) \leq 0{,}04$$
$$1 - \mathrm{F}(1\,000; 0{,}003; k) \leq 0{,}04$$
$$\mathrm{F}(1\,000; 0{,}003; k) \geq 0{,}96$$
$$\Rightarrow k = 6$$

Annahmebereich H_0:
$An = \{0, 1, \ldots, 5, 6\}$

Für beide Testverfahren liegt das Testergebnis mit sechs positiven Dopingproben im Annahmebereich der Nullhypothese. Dadurch fühlen sich durch das Ergebnis beide Institute in ihrer Annahme bestätigt, die Verfahren eignen sich nicht zur Klärung des Sachverhaltes.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ein Hypothesentest testet, wie der Name schon sagt, Annahmen über eine bestimmte Stichprobe. Dabei können mit jeder getroffenen Entscheidung Fehler gemacht werden, deren Größe zwar berechnet und auch beeinflusst werden kann, die aber nicht vermieden werden können.
Für das konkrete Beispiel ergeben sich die folgenden Fehlerarten:

Französisches Labor
In der Nullhypothese wird hier angenommen, dass sich die Qualität des Dopingtests verbessert hat und damit die Wahrscheinlichkeit für eine positive Probe auf 1 % gestiegen ist. Ein Fehler 1. Art oder α-Fehler ergibt sich dabei, wenn die Nullhypothese zwar wahr ist, der Test also tatsächlich zuverlässiger geworden ist, aber abgelehnt wird, weil in der Stichprobe zufällig so wenige positive Proben gefunden werden, dass die Zahl in den Ablehnungsbereich der Nullhypothese fällt.
Entsprechend kommt es zu einem Fehler 2. Art oder β-Fehler, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise angenommen wird, die Zahl der positiven Dopingproben also in den Annahmebereich der Nullhypothese fällt, obwohl die Trefferwahrscheinlichkeit des Tests nach wie vor unverändert bei 0,3 % liegt.

Heidelberger Molekularbiologe
In diesem Fall geht die Nullhypothese davon aus, dass sich die Sensitivität des Tests nicht verändert hat, ein Fehler 1. Art ergibt sich also, wenn mehr als sechs positive Dopingproben gezählt werden, obwohl die Trefferwahrscheinlichkeit noch immer bei $p = 0{,}003$ liegt. Der Fehler 2. Art tritt dann auf, wenn die Zahl der positiven Dopingproben in den Annahmebereich von H_0 fällt, obwohl die Qualität des Tests sich verbessert hat und die Trefferquote jetzt bei 1 % liegt.

Um den Fehler 2. Art berechnen zu können, muss immer die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese bekannt sein. In der Aufgabe soll dafür die Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese des jeweils anderen Labors angenommen werden. Damit ergibt sich:

Französisches Labor

$\mathrm{p}_1 = 0{,}003$
Entscheidung für H_0 für $X \geq 5$

$$\begin{aligned} P(\beta) &= P(X \geq 5) \\ &= 1 - \mathrm{F}(1\,000; 0{,}0003; 4) \\ &\approx 0{,}18448 \end{aligned}$$

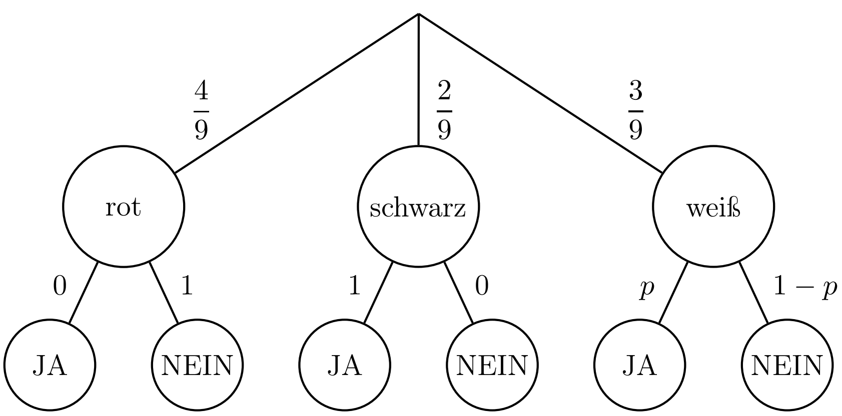
Heidelberger Molekularbiologe

$\mathrm{p}_1 = 0{,}01$
Entscheidung für H_0 für $X \leq 6$

$$\begin{aligned} P(\beta) &= P(X \leq 6) \\ &= \mathrm{F}(1\,000; 0{,}001; 6) \\ &\approx 0{,}1289 \end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Im beschriebenen Testverfahren zieht der Sportler zunächst eine Kugel aus einer Urne, die rot, schwarz oder weiß sein kann. Abhängig von der Farbe beantwortet er die Frage, ob er Dopingmittel benutzt, systematisch mit JA oder NEIN oder er antwortet wahrheitsgemäß.
Dabei sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler Dopingmittel verwendet, p, die Wahrscheinlichkeit, dass keine Dopingmittel verwendet werden, entsprechend $1 - p$:



Mit Hilfe des Baumdiagramms lässt sich jetzt die totale Wahrscheinlichkeit dafür ermitteln, dass ein Spieler auf die Frage nach der Benutzung von Dopingmitteln mit JA antwortet:

$$\begin{aligned} P\,(\text{JA}) &= P_{\text{rot}}\,(\text{JA}) + P_{\text{schwarz}}\,(\text{JA}) + P_{\text{weiß}}\,(\text{JA}) \\ &= \frac{4}{9}\cdot 0 + \frac{2}{9}\cdot 1 + \frac{3}{9}\cdot p = \frac{2+3p}{9} \end{aligned}$$

Für die Umfrage ist bekannt, dass von den 3 010 getesteten Sportlern 1 093 mit JA geantwortet haben. Aus dieser relativen Häufigkeit lässt sich damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sportler Dopingmittel verwendet, abschätzen:

$$\frac{1\,093}{3\,010} = \frac{2+3p}{9} \qquad \Rightarrow p \approx 0{,}4227$$

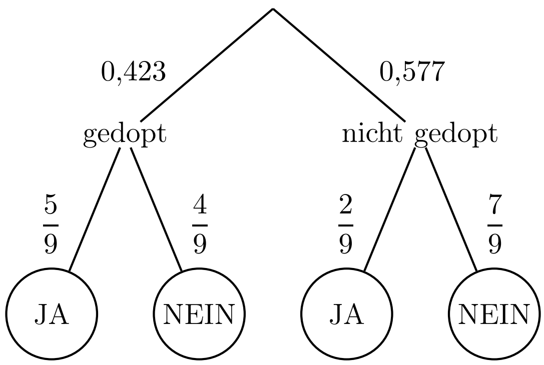
Aus dieser Umfrage ergibt sich also ein Anteil gedopter Athleten von etwa 42 %.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

In dieser Teilaufgabe ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass ein Sportler, der mit JA geantwortet hat, auch wirklich Dopingmittel verwendet, also

$$P_{\text{JA}}\,(\text{gedopt}) = \frac{P\,(\text{JA} \cap \text{gedopt})}{P\,(\text{JA})}.$$

Dabei ist $P\,(\text{JA}) = \frac{1\,093}{3\,010} \approx 0{,}363$ bekannt, zur Bestimmung des Schnittes ist wieder das Erstellen eines Baumdiagramms sinnvoll: Die Sportler werden zunächst nach den Merkmalen „gedopt“ und „nicht gedopt“ unterschieden. Anschließend wird jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass der Sportler mit JA antwortet. Die gedopten Spieler antworten dabei mit JA, wenn sie eine schwarze oder eine weiße Kugel ziehen, die nicht gedopten Spieler nur im Falle einer schwarzen Kugel:



Es ist also

$$P\left(\mathrm{JA} \cap \mathrm{gedopt}\right) \approx 0{,}423 \cdot \frac{5}{9},$$

damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_{\mathrm{JA}}\left(\mathrm{gedopt}\right) \approx \frac{0{,}423 \cdot \frac{5}{9}}{0{,}363} \approx 0{,}647.$$

Damit liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sportler, der mit JA geantwortet hat, auch wirklich gedopt ist, bei etwa 65 % und ist damit größer als der Zufall (50 %).