Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Von einem Würfel sind die 3 Eckpunkte A(-4 | 1 | 1), B(1 | 1 | 1) und D(-4 | 6 | 1) gegeben. Die Koordinaten der restlichen Eckpunkte sind zu bestimmen.

Aus der Differenz der x-Koordinaten der Punkte A und B

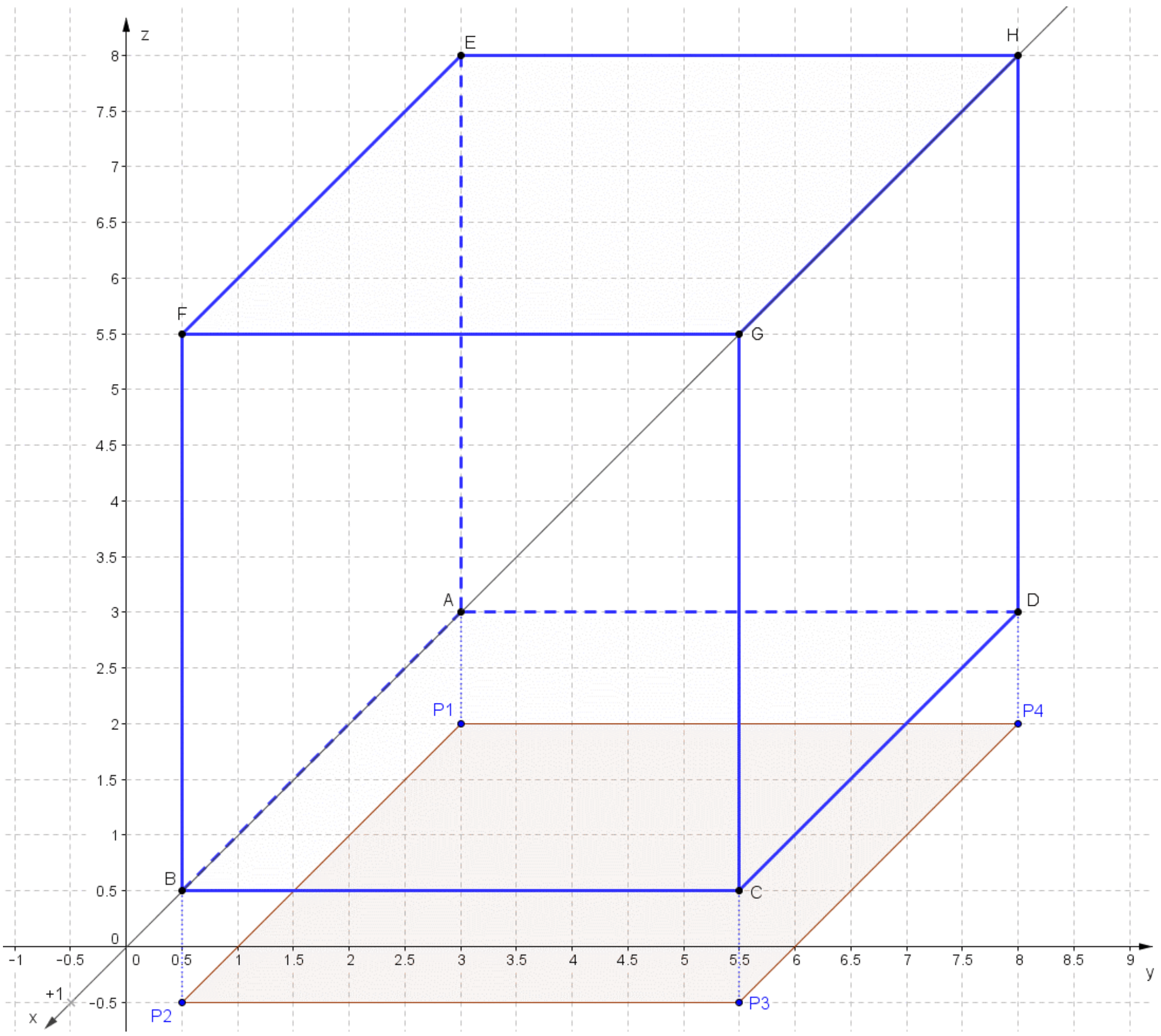
$$1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

lässt sich die Seitenlänge 5 des Würfels berechnen. Damit ergibt sich

C(1 | 6 | 1)   E(-4 | 1 | 6)   F(1 | 1 | 6)   G(1 | 6 | 6)   H(-4 | 6 | 6)

für die fehlenden Eckpunkte.

Die Zeichnung zeigt den Würfel parallel zur x-y-Ebene im Abstand einer Längeneinheit



Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Wie aus dem Tipp ersichtlich muss zunächst die Gerade durch den Punkt L(-40 | 23 | 26) und dem Eckpunkt E(-4 | 1 | 6) aufgestellt werden.

Richtungsvektor $\overrightarrow{LE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix}$

Geradengleichung g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix}$

Der Durchstoßpunkt E_{xy} der Geraden g mit der Projektionsebene, hier der x-y-Ebene z = 0 ergibt den gesuchten Bildpunkt.

Aus $\begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

folgt

$$\begin{aligned} 26 - 20r &= 0 \\ 20r &= 26 \\ r &= 1{,}3 \end{aligned}$$

und damit $\begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} + 1{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}8 \\ -5{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$ für den Ortsvektor von E_{xy}

$E_{xy} = (6{,}8|-5{,}6|0)$ ist die gesuchte Lösung

Beachte :

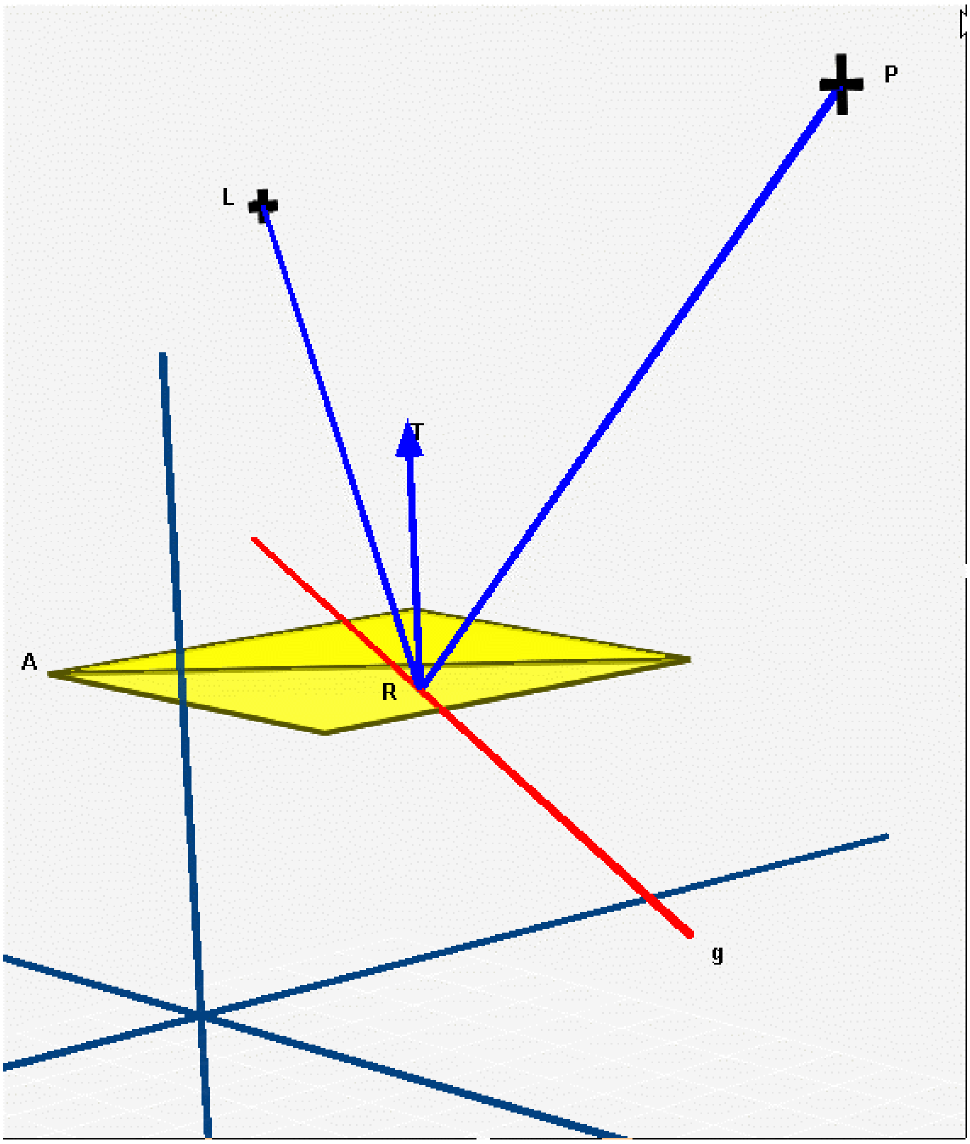
Bei Schattenaufgaben sind zwei verschiedene Ansätze zu unterscheiden.

Bei punktförmigen Lichtquellen (Lichtquelle L) erhält man die Bildpunkte, indem man jeden Punkt P mit L verbindet und die Gerade durch die Punkte L und P mit der Projektionsebene schneidet.

Bei parallelem Licht (z.B. Sonnenstrahlen) sucht man den Schnittpunkt der Geraden durch P und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen mit der Projektionsebene

Teilaufgabe 1.3.1

Ein Beobachter im Punkt P (20 | -7 | 16) sieht die Reflexion der punktförmigen Lichtquelle L aus Aufgabe 1.2 im Punkt R (0 | 3 | 6) auf der Oberseite des Würfels. Dieser Sachverhalt wird in der folgenden Skizze dargestellt :



Man erkennt die Oberseite des Würfels (gelb) mit dem Eckpunkt A, die Lichtquelle L und das Auge des Betrachters P. Die Ebene E1, die senkrecht zur Oberseite des Würfels durch P und L verläuft, schneidet die Würfeloberseite in der Geraden g

Lösung zur Teilaufgabe 1.3.1 (7 BE)

Zu zeigen ist : R (0 | 3 | 6) liegt auf der roten Schnittgeraden g. Zur Herleitung von g muss zunächst die Ebenengleichung von E1 erstellt werden :

Die Ebene E1 enthält die Punkte L und P und steht senkrecht auf der Würfeloberseite und damit auch senkrecht zur x-y-Ebene. Damit ist der Vektor $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ einer der beiden Richtungsvektoren von E1. Den zweiten Richtungsvektor erhält man aus dem Verbindungsvektor der beiden Punkte P und L, also

$$\vec{v} = \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ -30 \\ -10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und dieser Vektor ist kollinear zu $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung der Ebene E1 gewonnenen :

$$\text{E1 :} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Oberseite des Würfels ist Teil einer Ebene E2, die parallel zur x-y-Ebene im Abstand 6 Längeneinheiten verläuft. Also gilt:

E2 : z = 6

Zur Bestimmung der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen bieten sich eine Reihe von Verfahren an. An dieser Stelle verwenden wir den Tipp und wandeln zunächst die Ebene E1 mit dem Eliminationsverfahren in die Koordinatenform um .

$$\begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{lll} (I) & 20 + 6r = x & \\ (II) & -7 - 3r = y & | \cdot (+2) \\ (III) & 16 - r + s = z & \end{array}$$

Durch Addition der Gleichung (I) zum Doppelten der Gleichung (II) erhält man sofort die gesuchte Koordinatenform der Ebene E1 :

E1 : 6 = x + 2y

Lagebeziehung von Ebenen

Sind zwei Ebenen in Koordinatenform gegeben, so erhält man ihre Schnittgerade durch Lösen des zugehörigen unterbestimmten linearen Gleichungssystems.
Ist dieses Gleichungssystem unlösbar, sind die Ebenen parallel, ist das lineare Gleichungssystem allgemeingültig, sind die beiden Ebenen identisch

Das unterbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (I) & x + 2y = 6 \\ (II) & z = 6 \end{array}$$

lässt sich mit dem „Gaußschen Algorithmus“ relativ leicht lösen. In der Gestalt

$$\begin{array}{lccccc} (I) & 1 & 2 & 0 & | & 6 \\ (II) & 0 & 0 & 1 & | & 6 \\ (III) & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}$$

sieht man sofort z = 6 , y = t und aus x + 2t = 6 folgt x = 6 –2t . Der Lösungs-vektor hat also die Gestalt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ t \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

uns das ist die gesuchte Schnittgerade g der beiden Ebenen E1 und E2. Abschlie-ßend soll noch gezeigt werden, dass der Punkt R auf dieser Geraden liegt.

Die Punktprobe liefert für

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Ergebnis 6 - 2t = 0 und damit t = 3 .

Für t = 3 liegt also der Punkt R auf der Schnittgeraden. Damit ist der erste Teil der Aufgabe 1.3 erledigt und es folgt die

Lösung zur Teilaufgabe 1.3.1 (6 BE)

Zu zeigen ist, dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist, dass der Einfallswinkel zwischen dem einfallenden Lichtbündel und dem Normalenvektor der Würfelober-seite im Punkt R gleich dem Ausfallswinkel zwischen dem reflektierten Lichtbündel und diesem Normalenvektor ist. Bezogen auf die Skizze heißt das, es ist zu zeigen dass die Beträge der Winkel $\alpha = ∢$ (TRL) und $\beta = ∢$ (PRT) gleich groß sind.

Im Fall des Winkels α ist also der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{RT}$ und $\overrightarrow{RL}$,
im Fall von β der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RT}$ zu berechnen.

Mit $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RL} = \begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

sowie dem Normalenvektor $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{20}{\sqrt{2400} \cdot \sqrt{1}} = \frac{20}{20 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

und $$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{600} \cdot \sqrt{1}} = \frac{10}{10 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

und damit ist auch die zweite Bedingung erfüllt.

Lösung zur Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

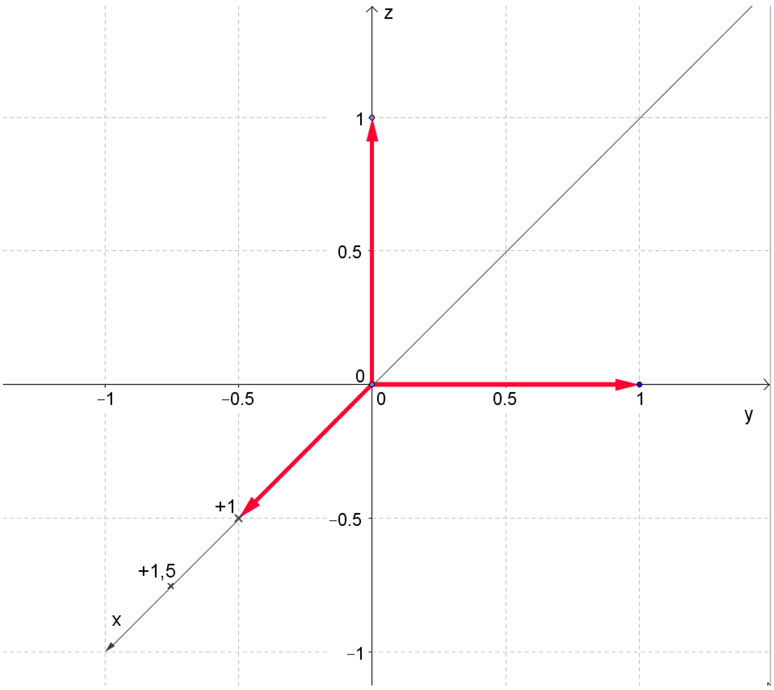
In dieser Aufgabe soll eine Abbildungsmatrix gefunden werden, welche das dreidimensionale Koordinatensystem in ein „deckungsgleiches“ zweidimensionales Koordinatensystem überführt. Dabei sollen die Koordinatenursprünge und die x-Achse des zweidimensionalen Systems mit der y-Achse des dreidimensionalen Systems sowie die z-Achse des 3-D-Koordinatensystems mit der y-Achse des 2-D-Systems übereinstimmen.

Aus den dreidimensionalen Einheitsvektoren ergeben sich neue zweidimensionale Vektoren.

Laut Material 2 zur Aufgabe 2.1 wird also der Einheitsvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf den Vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ der Tafelebene abgebildet}$$

Außerdem erkennt man in der Skizze auch die Bilder der beiden anderen (roten) Einheitsvektoren



Zur Erinnerung :

Ein wichtiger Satz zur Erzeugung einer Abbildungsmatrix M ist der folgende :

In den Spalten der Matrix M stehen die Bilder der Einheitsvektoren.

Beispiel : Wird der Einheitsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf den Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ abgebildet,}$$

hat die 1. Spalte der Abbildungsmatrix M folgendes Aussehen :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 2 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Die beiden übrigen Spalten bildet man analog aus den Bildern des zweiten und dritten Einheitsvektors

Neben dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Bildvektor $\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ wird

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf den Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ abgebildet.}$$

Nach dem Satz : In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Einheitsvektoren ergibt sich die gesuchte Abbildungsmatrix T zu

$$T = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Am Beispiel des Punktes D kann man die Richtigkeit von T überprüfen. Mit Hilfe der Matrix-Vektormultiplikation muss gelten :

$$M \bullet \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'}$$, also

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot (-4) + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 1 \\ -0{,}5 \cdot (-4) + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

qed.

Eine alternative Lösung wäre die Matrix T2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gewesen. Sie erzeugt aus dem Punkt D (-4 | 6 | 1) den Bildpunkt D' (0 | 8 | 3). T2 beschreibt eine Abbildung des dreidimensionalen Raum in den dreidimensionalen Raum, nämlich die Projektion aller Punkte des R³ auf eine Ebene, in diesem Fall die y-z-Ebene.

Lösung zur Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Gegeben war die Matrix F = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sie beschreibt eine Drehung aller Punkte des dreidimensionalen Raums um den Betrag eines Winkels α um die z-Achse.

Die Produktmatrix $M = T \cdot F$ beschreibt die Hintereinanderausführung von zwei Abbildungen. Da die Matrixmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist, kommt es dabei auf die Reihenfolge der Abbildungen an.

Im Sachzusammenhang bedeutet die Anwendung der Matrix M zunächst eine Drehung des gegebenen Würfels um den Winkel α um die z-Achse und anschließender Projektion des Bildwürfels auf die zweidimensionale y-z-Ebene.