Lösung zu Teilaufgabe 1 (8 BE)

Das Moses Mabhida Stadion in Durban, Südafrika ist eines der Stadien, die zur Fußballweltmeisterschaft 2010 erbaut wurden. Sein charakteristisches Merkmal ist der Stahlbogen, der das Stadion überspannt. Die äußere Bogenspannweite am Boden beträgt 340 m und die Höhe im Scheitelpunkt 103 m.

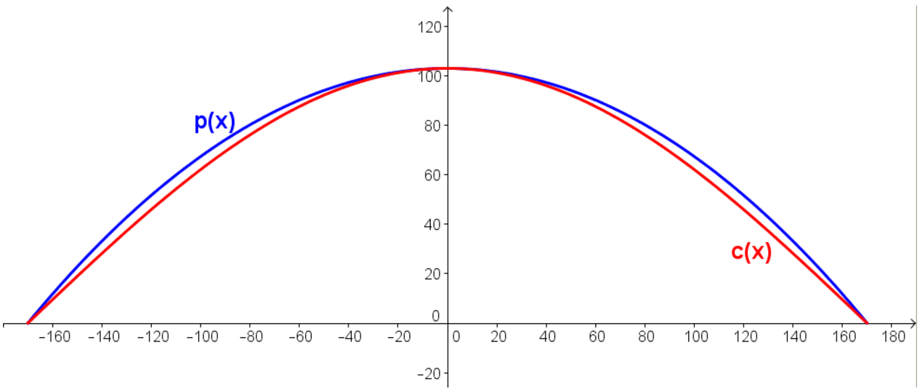
Bei den folgenden Rechnungen soll das Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Bodenlinie des Bogens auf der x-Achse und der Scheitelpunkt des Bogens auf der y-Achse liegt.
Dabei soll der äußere Rand des Bogens zum einen durch eine Polynomfunktion p

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x + x_1)$$

zum anderen durch eine Kosinusfunktion c mit

$$c(x) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot x\right)$$

beschrieben werden. Die Parameter $a,\ x_1,\ A,\ T$ sind zu bestimmen (siehe Skizze)



Da $N_1(170 \mid 0)$ und $N_2(-170 \mid 0)$ die Nullstellen der Polynomfunktion sind, kann man ihre x-Werte nach dem Satz über die Linearfaktorzerlegung in die Funktion p(x) einsetzen und erhält

$$\begin{aligned} p(x) &= a \cdot (x-170) \cdot (x-(-170)) \\ &= a \cdot (x-170) \cdot (x+170) \end{aligned}$$

Außerdem gilt $p(0) = 103$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} 103 &= a \cdot (0-170) \cdot (0+170) \\ &= a \cdot \left(-170^2\right) \\ &= -28900 \cdot a \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$a = -\frac{103}{28900}$$

$$a \approx -0{,}003564$$

Endergebnis : $p(x) = -\dfrac{103}{28900} \cdot (x-170) \cdot (x+170)$

Beachte :

Linearfaktorzerlegung

Ist eine Polynomfunktion z.B. dritten Grades nicht in der Normalform

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sondern mit Hilfe von Linearfaktoren in der Form

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

gegeben, so sind die Zahlen x_1 , x_2 , x_3 die Nullstellen der Polynomfunktion.

Bei der Kosinusfunktion $c(x) = A \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi}{T} \cdot x\right)$ spielen die Parameter C und D (siehe Kästchen) keine Rolle. A ist die Amplitude (Streckfaktor in y-Richtung) und kann sofort zu A = 103 bestimmt werden. Für die halbe Periodenlänge kann der Wert 340 aus der Zeichnung abgelesen werden, also gilt für

$$B = \frac{2\pi}{T} = 680 \quad \text{und daraus folgt}$$

$$T = \frac{2\pi}{680} = \frac{\pi}{340} \approx 0{,}0092$$

und damit für die Funktion c(x) :

$$c(x) = 103 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{340} \cdot x\right)$$

Beachte :

Die Bedeutung der Parameter A, B, C und D in der Kosinusfunktion

$$c(x) = A \cdot \cos(B \cdot (x - C)) + D$$

A : Amplitude, Streckung des Graphen in y- Richtung

B : Streckung des Graphen in x- Richtung. Insbesondere gibt $\dfrac{2\pi}{B}$ die Periodenlänge der Funktion c an

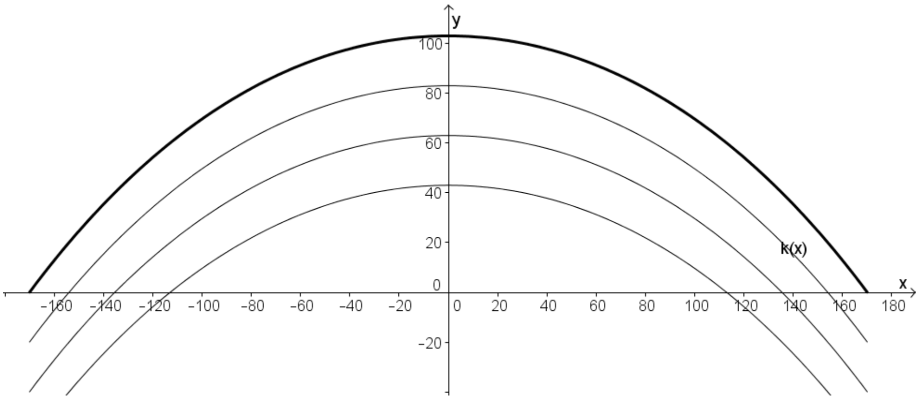
C : Verschiebung des Graphen in x- Richtung

D : Verschiebung des Graphen in y- Richtung

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Eine weitere Möglichkeit, den Verlauf der Stahlkonstruktion zu modellieren ist die Verwendung der umgekehrten Kettenlinie k mit

$$k(x) = C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right) \qquad C \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}^+$$



In der Zeichnung (nicht verlangt) wurde C = 258,04 und $\lambda =$ 0,00645 gewählt.

Die Bedeutung der Konstanten C ist aus der Zeichnung leicht zu erkennen. Positive Werte von C verschieben den Graphen nach oben, negative Werte verschieben den Graphen von k nach unten.

Beweis der y-Achsen-Symmetrie : Ist eine Funktion f symmetrisch zur y- Achse, so muss gelten : $f(-x) = f(x)$

Nachrechnen am Beispiel der Funktion k ergibt :

$$k(-x) = C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{\lambda \cdot (-x)} + e^{-\lambda \cdot (-x)}\right)$$

$$= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{-\lambda \cdot x} + e^{\lambda \cdot x}\right)$$

$$= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{\lambda \cdot x} + e^{\lambda \cdot x}\right)$$

$$= k(x) \qquad qed$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Um den Hochpunkt zu berechnen, benötigt man die erste Ableitung der Funktion k.

$$k'(x) = -\frac{1}{2\lambda} \cdot \left(\lambda \cdot e^{\lambda x} + (-\lambda)e^{-\lambda x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda \cdot \left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist $k'(x) = 0$

das heißt $-\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right) = 0 \qquad | \cdot (-2)$

$$\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right) = 0 \qquad | + e^{-\lambda x}$$

$$e^{\lambda x} = e^{-\lambda x} \qquad | \; Exponentenvergleich$$

$$\lambda x = -\lambda x \qquad | + \lambda x$$

$$2\lambda x = 0 \qquad | \div 2\lambda, \; \lambda \neq 0$$

$$x = 0$$

der Hochpunkt H hat die Koordinaten $H\left(0 \middle| C - \frac{1}{\lambda}\right)$, da

$$k(0) = C - \frac{1}{2\lambda} \cdot 2 = C - \frac{1}{\lambda}$$

Die Anwendung der hinreichenden Bedingung für H war in der Aufgabe nicht verlangt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

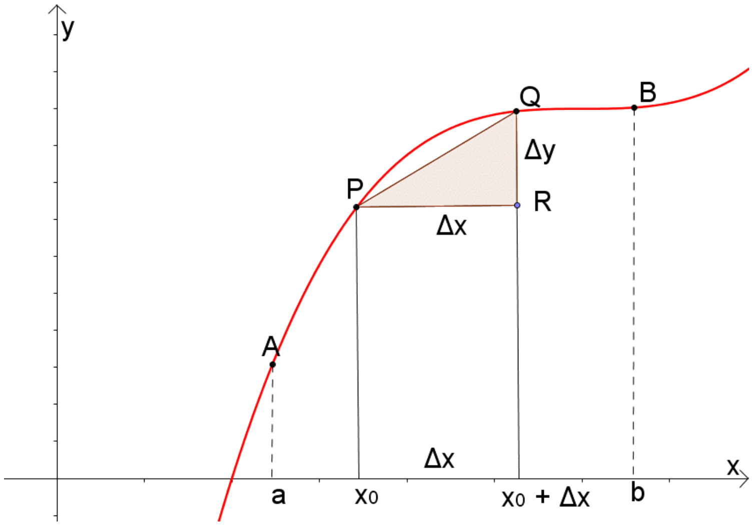
Für die Länge $L_a(x)$ des Bogens des Graphen einer Funktion f von der Stelle a bis zur Stelle x wird in der folgenden Tabelle (Material 3) die Formel

$$L_a^{\prime}(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

hergeleitet.

Mit Hilfe der nebenstehenden Zeichnung sollen die ersten drei Schritte der folgenden Tabelle erklärt werden.

Nachfolgend bedeutet $\overset{\frown}{AQ}$ die Länge des Kurvenbogens zwischen A und Q



	Sei $\overset{\frown}{AB}=L_a(x_0+\Delta x)$ und $\overset{\frown}{AP}=L_a(x_0)$, so folgt	Festlegung der in den folgenden Zeilen benutzten Schreibweisen für die Bogenlängen
(1)	$\overset{\frown}{PQ}=L_a(x_0+\Delta x)-L_a(x_0)$	Die Länge des Funktionsgraphen zwischen P und Q ist die Differenz der Bogenlänge von A bis Q und der Bogenlänge von A bis P
(2)	$\left\|\overline{PQ}\right\| \leq \overset{\frown}{PQ} \Leftrightarrow$ $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \leq L_a(x_0+\Delta x)-L_a(x_0) \Rightarrow$	Die Bogenlänge wird durch die Sekantenlänge approximiert. Nach Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck (PQR) $\left\|\overline{PQ}\right\|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ Da die Sekante PQ höchstens so lang ist wie der Bogen von P nach Q, ist die Sekantenlänge auch höchstens so groß wie die Differenz der Längen L_a
(3)	$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \leq \frac{L_a(x_0+\Delta x)-L_a(x_0)}{\Delta x}$	Division beider Seiten durch Δx ergibt auf der rechten Seite der Ungleichung den Differenzenquotienten der Funktion L_a. Die Umformungsschritte auf der linken Seite finden sich unterhalb der Tabelle
(4)	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ $\leq \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{L_a(x_0+\Delta x)-L_a(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \ldots$	Nicht Teil der Aufgabe : Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten und ....
(5)	$\sqrt{1+(f'(x))^2}=L_a^{\prime}(x)$	Verwendung der klassischen Schreibweise für die Ableitung der Funktion $L_a(x)$

Z

ausführliche Rechenschritte zum Übergang von Zeile 2 zu Zeile 3 :

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \leq L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0) \quad \left| \div \Delta x, \quad \Delta x \neq 0 \right.$$

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} \leq \frac{L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2}} \leq \quad .....$$

$$\sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \leq \quad .....$$

$$\sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \leq \quad .....$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \leq \frac{L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)}{\Delta x}$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (8 BE)

Die Lösung dieser Teilaufgabe ist ein weiterer Schritt zur Berechnung der Bogenlänge des Bogens über dem Moses Mabhida Stadion. Nachdem in Teil 3.1 für die Bogenlänge $L_a(x)$ die Beziehung $L_a{}'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ zumindest teilweise hergeleitet wurde, geht es jetzt darum, das Integral

$$\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

zu berechnen. An dieser Stelle wird klar, warum die umgekehrte Kettenlinie k(x) und nicht die beiden anderen Modellierungsfunktionen p(x) und c(x) Verwendung findet. Mit p(x) und c(x) wäre die Berechnung dieses Integrals ungleich schwerer, wenn nicht sogar unmöglich. Also ist jetzt das Inegral

$$\int \sqrt{1+(k'(x))^2}\, dx \quad \text{zu berechnen}$$

Unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 2.2 gilt :

$$\int \sqrt{1+\left(k'(x)\right)^2}\,dx = \int \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)\right)^2}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}\right)\right)^2}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\cdot\left(e^{-2\lambda x} - 2\cdot e^{-\lambda x+\lambda x} + e^{2\lambda x}\right)\right)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\cdot\left(e^{-2\lambda x} - 2 + e^{2\lambda x}\right)\right)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{4}\cdot e^{-2\lambda x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot e^{2\lambda x}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{1}{4}\cdot\left(e^{-2\lambda x} + 2 + e^{2\lambda x}\right)\right)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}\right)\right)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \left(e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}\right)dx$$

Damit hat der Integrand eine Form, die leicht zu integrieren ist

$$\frac{1}{2}\cdot\int\left(e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda x}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\cdot\left[-e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\cdot\left[\,e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}\right]+C$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Im letzten Schritt ist nun die halbe Bogenlänge zu berechnen. Das bestimmte Integral

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{-170}^{0}\left(e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right)dx$$

gibt die Länge der Seilbahn vom Boden bis zum Scheitelpunkt an. Setzt man laut Aufgabe für $\lambda=0{,}00645$ ein, so gilt

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{-170}^{0}\left(e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-170}^{0}\left(e^{-0{,}00645\,x}+e^{0{,}00645\,x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\cdot 0{,}00645}\cdot\left[\,e^{0{,}00645\,x}-e^{-0{,}00645\,x}\right]_{-170}^{0}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 0{,}00645}\cdot\left[\,\left(e^{0}-e^{0}\right)-\left(e^{-1{,}0965}-e^{1{,}0965}\right)\right]$$

$$\approx 77{,}519\cdot\left[0-\left(-2{,}6596\right)\right]$$

$$\approx 206{,}17$$

Die mit der Bahn zurückgelegte Strecke beträgt also rund 206 Meter.