Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Die Parameter in $f(x) = k \cdot e^{a \cdot x^2}$ sollen so bestimmt werden, dass die Kurve durch die Punkte $P_1\,(-2{,}53 \mid 0{,}835)$ und $P_2\,(3{,}57 \mid 0{,}39)$ geht. Da die Anzahl der Parameter und die Anzahl der Bedingungen übereinstimmen, gibt es eine eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{llll}
P_1\,(-2{,}53 \mid 0{,}835): & f(-2{,}53) = 0{,}835 & \Leftrightarrow & 0{,}835 = k \cdot e^{a \cdot (-2{,}53)^2} \quad \mathrm{I} \\
P_2\,(3{,}57 \mid 0{,}39): & f(3{,}57) = 0{,}39 & \Leftrightarrow & 0{,}39 = k \cdot e^{a \cdot (3{,}57)^2} \quad \mathrm{II}
\end{array}$$

„Potenzen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.“ (2. Potenzgesetz)

Durch Division der beiden Gleichungen lässt sich der Parameter k eliminieren und a berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{0{,}835}{0{,}39} &= e^{a \cdot \left((-2{,}53)^2 - (3{,}57)^2\right)} & \\
2{,}14 &= e^{-6{,}344 \cdot a} & \mid \ln \\
-6{,}344 \cdot a &= \ln(2{,}14) & \mid : (-6{,}344) \\
a &\approx -0{,}12 &
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung I oder II $k \approx 1{,}8$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Für zwei beliebige Punkte $P_1\,(x_1 \mid y_1)$ und $P_2\,(x_2 \mid y_2)$ ergibt sich analog zu Teilaufgabe 1.1:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{x_1^2 - x_2^2}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass die betrachtete Funktion ein Maximum bei $x = 0$ besitzt. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. rechnerisch über eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - in der ersten Ableitung:

Merke:

Um zu untersuchen, ob an einer Nullstelle ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet, wird ein Wert rechts und ein Wert links der Nullstelle in die Funktion eingesetzt und die Vorzeichen vergleichen. Liegen noch weitere Nullstellen vor, muss der ausgewählte Wert näher an der untersuchten Nullstelle liegen als die nächste Nullstelle.

$$f(x) = 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$
$$f'(x) = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$
$$0 = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2} \Leftrightarrow x = 0$$
$$f'(-1) > 0$$
$$f'(+1) < 0$$

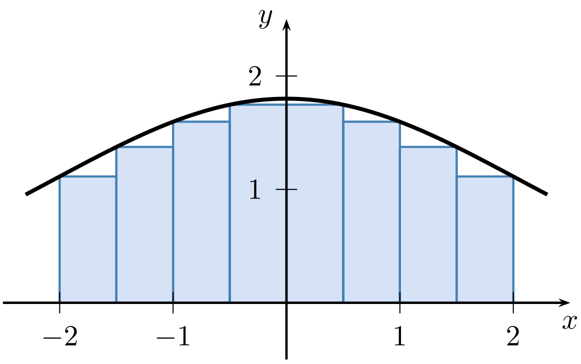
2. Wegen $f(x) = f(-x)$ verläuft der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse, die einzige Extremstelle der Funktion muss auf der Symmetrieachse, also bei $x = 0$ liegen. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ muss ein Maximum vorliegen.

3. Der Exponent der e-Funktion ist wegen $x^2 \geq 0$ entweder Null oder negativ. Da $\mathrm{e}^0 = 1$ und für $a > 0$ $\mathrm{e}^{-a} < 1$ gilt, muss bei $x = 0$ ein Maximum vorliegen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

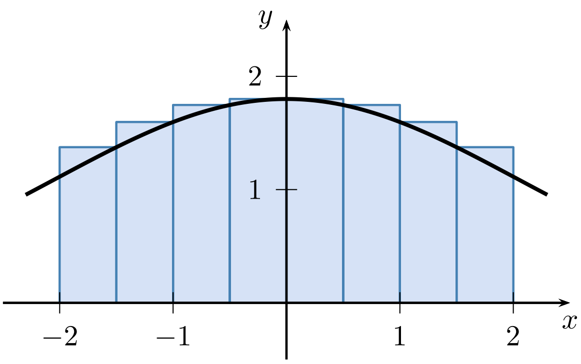
Zur näherungsweisen Berechnung der Fläche unter der betrachteten Kurve kann die Fläche durch Rechtecke angenähert werden. Dabei wird eine untere Schranke für den tatsächlichen Flächeninhalt ermittelt, indem nur Rechtecke betrachtet werden, die von der Kurve nicht geschnitten werden (Untersumme), die Fläche der Rechtecke, die von der Kurve geschnitten werden, wird als Obersumme bezeichnet und legt eine obere Grenze für die tatsächliche Fläche fest.
In der Aufgabe war bereits vorgegeben, dass das Intervall $[-2; 2]$ in 8 Streifen unterteilt werden soll, die Breite der einzelnen Streifen beträgt damit 0,5 m. Die Höhe der Rechtecke ergibt sich aus den entsprechenden Funktionswerten.
Aufgrund der Symmetrie der Funktion reicht es aus, die Streifen im Intervall $[0; 2]$ zu addieren und die berechnete Fläche mit 2 zu multiplizieren.

Untersumme:



$$U_8 = 2 \cdot [0{,}5 \cdot (f\,(0{,}5) + f\,(1) + f\,(1{,}5) + f\,(2))]$$
$$\approx 5{,}8312$$

Obersumme:



$$O_8 = 2 \cdot [0{,}5 \cdot (f\,(0) + f\,(0{,}5) + f\,(1) + f\,(1{,}5))]$$
$$\approx 6{,}5173$$

Für die Fläche unter der Kurve gilt damit $5{,}8312\,\mathrm{m}^2 < A < 6{,}5173\,\mathrm{m}^2$ oder

$$A \approx \frac{5{,}8312 + 6{,}5173}{2}\,\mathrm{m}^2 \approx 6{,}17\,\mathrm{m}^2.$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

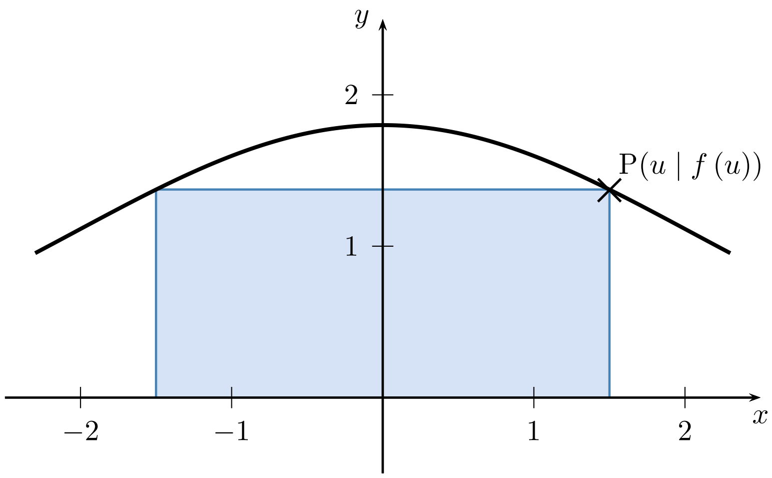
Die prozentuale Abweichung des Wertes aus Teilaufgabe 2.1 von der Computernäherung beträgt

$$\Delta A = 1 - \frac{6{,}17}{6{,}1966} \approx 0,0043 = 0{,}43\,\%.$$

Durch die Methode aus Teilaufgabe 2.1 könnten bessere Näherungswerte erzielt werden, wenn die Anzahl der Rechteckstreifen erhöht wird.

Lösung zu Teilaufgabe 3 (7 BE)

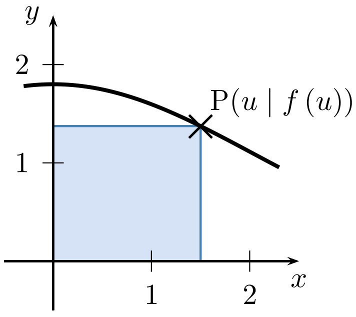
In dieser Aufgabe soll in der Gaube ein rechteckiges Fenster mit maximaler Größe angebracht werden. Die Maße des Fensters sollen berechnet werden. Dem Material kann entnommen werden, dass die oberen Fensterecken mit der Funktion abschließen sollen:



Indem der Punkt P entlang des Funktionsgraphens verschoben wird, ändert sich die Fläche des entsprechenden Rechtecks. Gesucht ist jetzt der Punkt P, für den die Rechteckfläche maximal ist.

Für die Rechnung reicht es aus Symmetriegründen wieder aus, nur eine Hälfte der Dachgaube und damit auch des Fensters zu betrachten:

$$\begin{aligned} A(u) &= u \cdot f(u) \\ &= u \cdot 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot u^2} \\[1em] A'(u) &= 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot u^2} + u \cdot (-0{,}432u) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot u^2} \\ &= \left(1{,}8 - 0{,}432u^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot u^2} \\[1em] 0 &= \left(1{,}8 - 0{,}432u^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot u^2} \\ u &= \pm\sqrt{\frac{1{,}8}{0{,}432}} \approx \pm 2{,}04 \end{aligned}$$



Dem Kontext kann entnommen werden, dass nur die positive Lösung relevant ist. Wegen $A'(0) > 0$ und $A'(3) < 0$ liegt für die Funktion A bei $u \approx 2{,}04$ ein Maximum vor.

Die Fensterfläche beträgt dann wegen $A(2{,}04) = 2 \cdot 2{,}04 \cdot 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot (2{,}04)^2} \approx 4{,}46$ etwa $A = 4{,}46\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Teilaufgabe 4 (5 BE)

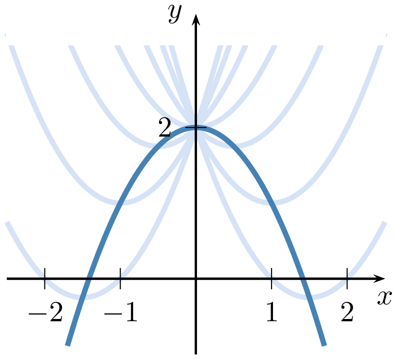
Hier soll begründet werden, dass die Wendepunkte der Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{25}x^2}$ alle auf Parallelen zur y-Achse liegen. Da der Scharparameter k ausschließlich als Koeffizient der e-Funktion vorkommt, verursacht er lediglich eine Streckung der Funktion in y-Richtung. Die x-Werte der Wendepunkte der Schar werden durch eine Veränderung von k also nicht angefasst, nur ihre y-Werte verändern sich, woraus eine Ortskurve der Wendepunkte parallel zur y-Achse resultiert.

Erläuterung: *Ortskurven*

Die Zuordnungsvorschrift einer Kurvenschar enthält neben der Variablen noch einen Parameter, den sogenannten Scharparameter. Für jeden Wert des Scharparameters ergibt sich eine andere Zuordnungsvorschrift und damit ein anderer Funktionsgraph.

In den meisten Fällen haben alle Graphen einer Funktionsschar einen ähnlichen Verlauf, die Extrem- und Wendestellen können als Funktion des Scharparameters bestimmt werden. Die Extrem- oder Wendestellen einer Kurvenschar können selbst wieder auf einer Kurve liegen:

Die Abbildung rechts zeigt in hellblau einige Repräsentanten der Schar $f_k(x) = x^2 - kx + 2$. Außerdem ist zu sehen, dass alle Tiefpunkte der Schar bei $\text{TP}\big(0{,}5k \mid -0{,}25k^2 + 2\big)$ auf einer weiteren, dunkelblau eingezeichneten, Kurve liegen. Diese Kurve wird als Ortskurve der Tiefpunkte bezeichnet. Um sie einzuzeichnen, ist es grundsätzlich möglich, über die Koordinaten der Tiefpunkte einzelne Punkte zu berechnen:



Für jeden Wert von k wird entsprechend eine x- und eine y-Koordinate berechnet:

$$k \begin{array}{l} \nearrow x \\ \searrow y \end{array}$$

Dieses Verfahren ist mühsam, jeder Punkt auf der Kurve muss einzeln berechnet werden, insbesondere ist ein automatisiertes Zeichen mit Hilfe eines Computers o.ä. nicht möglich.

Ziel der Berechnung von Ortskurven ist es daher, eine Zuordnungsvorschrift zu finden, die wie gewohnt funktioniert: Zu einem vorgegebenen x wird ein y berechnet.

Hierfür wird in einem ersten Schritt durch Umformen der x-Koordinate der Wert des Scharparameters als Funktion von x bestimmt und anschließend dieser Zusammenhang in die y-Koordinate eingesetzt. Für das konkrete Beispiel hier ergibt sich $k = 2x$ und damit $y = -0{,}25 \cdot (2x)^2 + 2 = -x^2 + 2$.

Die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve der Tiefpunkte lautet also $g(x) = -x^2 + 2$.