Lösung

Folgende Angaben können dem Aufgabentext entnommen werden:

- Anteil der Personen, die ihren gebuchten Flug nicht antreten: 6 %
- Kosten pro nicht angetretenem Flug: 150 €
- Anzahl der Sitzplätze: 189
- Anzahl der maximal angenommenen Buchungen: 200
- Kosten bei Überbuchung pro Person: 500 €

Lösung zu Aufgabe 1

Das durchgeführte Zufallsexperiment hat nur zwei Ausgänge:

1. die Person tritt den gebuchten Flug nicht an ($q = 0{,}06$)
2. die Person tritt den gebuchten Flug an ($p = 1 - q = 0{,}94$)

Diese Wahrscheinlichkeiten sind für jede der 57 untersuchten Personen gleich, so dass es sich hier um ein Bernoulli-Experiment handelt und der Zusammenhang mit einer Binomialverteilung modelliert werden kann.

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass genau $k = 52$ der $n = 57$ Personen ihren Flug antreten:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ P(X = 52) &= \binom{57}{52} \cdot 0{,}94^{52} \cdot 0{,}06^5 \\ &\approx 0{,}13 \mathrel{\hat{=}} 13\,\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 gebuchten Flügen höchstens 186 Flüge angetreten werden, beträgt

$$P(X \leq 186) = \mathrm{F}(200; 0{,}94; 186) \approx 0{,}315 \mathrel{\hat{=}} 31{,}5\,\%.$$

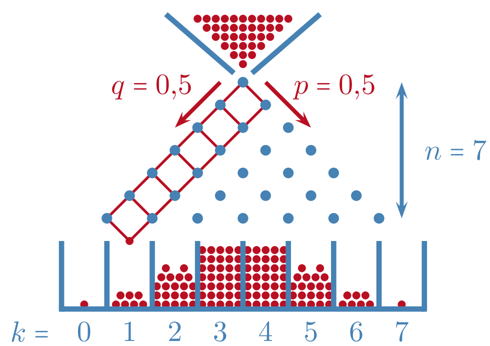
Erläuterung: *Bernoulli-Ketten*

Als Bernoulli-Experimente werden Zufallsexperimente bezeichnet, für die es nur zwei Ausgänge mit den Wahrscheinlichkeiten p („Treffer") und $q = 1 - p$ („Nieten") gibt. Führt man ein Bernoulli-Experiment n mal hintereinander aus, spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment genau k Treffer zu erzielen, beträgt:

$$P(X = k) \quad = \quad \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

In einem n-stufigen Zufallsexperiment gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Treffer zu verteilen. Jeder der k Treffer hat die Wahrscheinlichkeit p $\left(\rightarrow p^k\right)$. Die $n - k$ Nieten haben die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ $\left(\rightarrow (1-p)^{n-k}\right)$.



Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Bernoulli-Kette ist die Binomialverteilung.
Sie kann mit Hilfe des Galton-Brettes (in der Abbildung oben für $p = q = 0{,}5$) gut veranschaulicht werden. Die Anzahl der Kugeln pro Fach kann hier über eine Bernoulli-Kette der Länge 7 berechnet werden und variiert in Abhängigkeit von der Anzahl der möglichen Pfade, die zu diesem Fach führen. In der Abbildung sind beispielhaft alle Pfade, die in Fach 2 führen (6 x links, 1 x rechts fallen) eingezeichnet. Die resultierende Verteilung der Kugeln in die Fächer entspricht einer Binomialverteilung mit $n = 7$ und $p = 0{,}5$. Die Anzahl der Treffer k entspricht der Anzahl der Abzweigungen, an denen die Kugel nach rechts gefallen ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Fluggesellschaft muss genau dann eine Entschädigung zahlen, wenn von den 200 Buchungen 190 angenommen werden. Mindestens eine Entschädigung muss daher gezahlt werden, wenn mindestens 190 Personen ihren Flug antreten möchten:

$$\begin{aligned} P(X \geq 190) &= 1 - P(X \leq 189) \\ &= 1 - \mathrm{F}(200; 0{,}94; 189) \\ &\approx 1 - 0{,}659 = 0{,}341 \mathrel{\hat{=}} 34{,}1\% \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Ziel der gezeigten Rechnung ist es, die Anzahl der maximal zugelassenen Überbuchung so zu bestimmen, dass die Kosten für die Fluggesellschaft möglichst gering ausfallen. Die Kosten für einen gebuchten und dann nicht wahrgenommenen Flug betragen pro Buchung 150 €, die Kosten für einen überbuchten Flug betragen jedoch pro Person, die abgewiesen werden muss, 500 €. In einem gewissen Rahmen kann es also günstiger sein, einige nicht angetretene Flüge in Kauf zu nehmen, als eine Überbuchung zu riskieren.

Es stellt sich also die Frage, wie viele Buchungen (n) die Fluggesellschaft bei einem Flug mit der Boeing 737-900 mit 189 Sitzplätzen annehmen sollte.
Mit $V(n)$ werden die anfallenden Gesamtkosten beschrieben. Diese setzen sich, wie beschrieben, aus den Kosten für nicht angetretene und den Kosten für überbuchte Flüge zusammen:

- mit $V_1(n)$ werden die Kosten für nicht angetretene Flüge berechnet

  Da das Flugezeug genau 189 Sitzplätze bereitstellt, ist es nicht ausgebucht, wenn höchstens 188 Personen ihren Flug antreten. n ist die Anzahl der gebuchten Flüge, die gefunden werden soll, k steht für die Anzahl der tatsächlichen Passagiere.

  Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von n Buchungen maximal 188 wahrgenommen werden, beträgt

  $$P(k \leq 188) = \sum_{k=0}^{188} \binom{n}{k} \cdot 0{,}94^k \cdot 0{,}06^{n-k}.$$

  Dabei bleiben 189-k Sitzplätze unbesetzt. Die Kosten betragen $(189 - k) \cdot 150$ €.

- $V_2(n)$ berechnet die Kosten für überbuchte Flüge. Das Flugzeug ist überbucht, wenn von den n Buchungen mindestens 190 wahrgenommen werden. Die Anzahl der Überbuchungen beträgt dann k-189 und verursacht Kosten in Höhe von $(k - 189) \cdot 500$ €. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall beträgt

  $$P(k \geq 190) = \sum_{k=190}^{n} \binom{n}{k} \cdot 0{,}94^k \cdot 0{,}06^{n-k}.$$

In der abgebildeten Tabelle werden nach $V(n)$ die durchschnittlich zu erwartenden Kosten pro Flug der Boeing 737-900 für verschiedene Anzahlen an Buchungen n mit $190 < n < 202$ berechnet. Ein Vergleich der Gesamtkosten zeigt, dass diese zunächst mit zunehmendem n sinken. Ein Minimum von durchschnittlich 637 € pro Flug der Maschine wird für 198 akzeptierte Buchungen erreicht. Übersteigt die Anzahl der Buchungen diesen Wert, steigen auch die Gesamtkosten wieder an.

Um möglichst kosteneffizient zu arbeiten, sollte die Fluggesellschaft also pro Flug der Boeing 737-900 198 Buchungen akzeptieren. Im Mittel sind dann 637 € Zusatzkosten pro Flug zu erwarten.

Lösung zu Aufgabe 4

In der Aufgabe geht es um die Frage, ob die Höhe der Entschädigungen E angemessen ist, die im Falle der Verspätung eines Fluges gezahlt werden.

Die Verspätungen werden in drei Kategorien eingeteilt:

- die Verspätung liegt zwischen 2 und 5 Stunden ($p = 0{,}05$): $E = 150\,€$
- die Verspätung liegt zwischen 5 und 24 Stunden ($p = 0{,}02$): $E = 450\,€$
- die Verspätung beträgt mehr als 24 Stunden ($p = 0{,}01$): $E = 600\,€$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Flug verspätet startet, beträgt also

$$P(\text{Verspätung}) = 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}08.$$

Im Mittel ist mit einer Entschädigungszahlung in Höhe von

$$E = 0{,}05 \cdot 150\,€ + 0{,}02 \cdot 450\,€ + 0{,}01 \cdot 600\,€ = 22{,}50\,€$$

zu rechnen.

Der Verdienstausfall des Geschäftsmannes beläuft sich bei Verspätungen über 2 Stunden pauschal auf 350 €. Damit ergibt sich für den mittleren Verdienstausfall pro Flug V:

$$V = 0{,}08 \cdot 350\,€ = 28\,€$$

Die Entschädigungszahlen sind für den Geschäftsmann also langfristig nicht angemessen, da er pro Flug im Mittel 5,50 € Verluste macht.