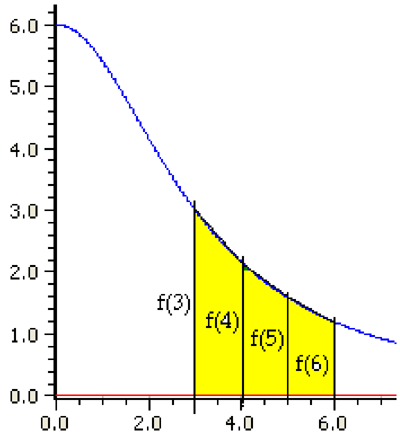
Hessen-2009-Analysis-A2-LK

$f(x) = \frac{54}{x^2+9}$



1. $x \in R$ ➔ $x^2 \ge 0$ ➔ $x^2+9 \ge 9$ ➔ $f(x) = \frac{54}{x^2+9} \le 6$. Da $f(0) = 6$ ist , ist (0|6) lokaler Hochpunkt der Funktion

2. Trapezmethode mit der Streifenbreite 1:

$$A(3;6) = \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{5}(f(i) + f(i+1)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{54}{i^2+9} + \frac{54}{(i+1)^2+9}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{54}{3^2+9} + \frac{54}{4^2+9} + \frac{54}{4^2+9} + \frac{54}{5^2+9} + \frac{54}{5^2+9} + \frac{54}{6^2+9}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{54}{3^2+9} + \frac{2\cdot 54}{4^2+9} + \frac{2\cdot 54}{5^2+9} + \frac{54}{6^2+9}\right) \approx 5{,}848$$

Eine Verbesserung tritt ein, wenn man die Fläche in noch mehr gleich breite Streifen teilt: bei n>3 Streifen erhält man Streifenbreite $\Delta x = \frac{6-3}{n} = \frac{3}{n}$ und damit

$A(3;6) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(3+i\cdot\frac{3}{n}) + f(3+(i+1)\cdot\frac{3}{n}))$. Bildet man jetzt noch den $\lim\limits_{n\to\infty}$, dann ist das die exakte Fläche.

3. $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$. Aus den beiden Gleichungen $g(3) = \frac{a}{3} + \frac{b}{9} = \frac{54}{18}$ und $g(6) = \frac{a}{6} + \frac{b}{36} = \frac{54}{45}$ folgt: $\frac{a}{6} = \frac{54}{36} - \frac{b}{18} = \frac{54}{45} - \frac{b}{36}$ ➔ $\frac{54}{36} - \frac{54}{45} = -\frac{b}{36} + \frac{b}{18} = \frac{b}{36}$ ➔ <u>b=10,8</u>

Aus $g(3) = \frac{a}{3} + \frac{b}{9} = \frac{54}{18}$ folgt $\underline{a = \frac{54}{6} - \frac{b}{3} = 5{,}4}$

- $\int_3^6\left(\frac{5{,}4}{x} + \frac{10{,}8}{x^2}\right)dx = \left[5{,}4\cdot\ln x - \frac{10{,}8}{x}\right]_3^6 = \left(5{,}4\cdot\ln 6 - \frac{10{,}8}{6}\right) - \left(5{,}4\cdot\ln 3 - \frac{10{,}8}{3}\right)$=5,543

4. $\int\frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C \Leftrightarrow \arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}$ ➔

$$\left(18\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)' = 18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{6}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{9}} = \frac{6\cdot 9}{x^2+9} = \frac{54}{x^2+9}$$

- $\int_3^6\left(\frac{54}{x^2+1}\right)dx = 18\left[\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_3^6 = 18(\arctan(2) - \arctan(1)) = 5{,}7915$
- a) $\frac{5{,}848}{5{,}7915} \approx 1{,}0097$, d.h. eine Abweichung von etwa +1%
- b) $\frac{5{,}543}{5{,}7915} \approx 0{,}957$, d.h. eine Abweichung von etwa -4%

5. $G(x) = 5{,}4 \cdot \ln x - \frac{10{,}8}{x}$ und $F(x) = 18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$ sind Stammfunktionen von g und f.

- Da $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} 18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = 9\pi$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5{,}4 \cdot \ln x - \frac{10{,}8}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5{,}4 \cdot x \ln x - 10{,}8}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5{,}4 \cdot (\ln x + 1) - 10{,}8}{1}\right)$ nach der Regel von de l'Hôpital, die angewandt werden darf, weil der $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt. Es folgt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5{,}4 \cdot \ln x - 5{,}4}{1}\right) = \infty$