Hessen-2009-Analysis-A1-LK

1. Graph3 ist der Graph zu f_2 ; Graph1 ist der Graph zu f_2';a ist der Radius der Halbkreise f_a

2.

- $f_a = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{u}; u = a^2 - x^2 \Rightarrow f_a'(x) = f_a'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- Die Graphen von f_a sind symmetrisch an der y_Achse, weil $f_a(-x) = \sqrt{a^2 - (-x)^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = f_a(x)$
- Die Graphen von f_a' sind symmetrisch am Ursprung , weil $f_a(-x) = \frac{-(-x)}{\sqrt{a^2 - (-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -f(x)$
- D_f =[-a;a]; $D_{f'}$ =(-a;a)

3. Die Seiten des Rechteckes sind u<=a und f(u). Damit ergibt sich die Zielfunktion:

$$A(u) = 2u \cdot f(u) = 2u \cdot \sqrt{a^2 - u^2} \Rightarrow A'(u) = 2\sqrt{a^2 - u^2} - \frac{2u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 2 \cdot \frac{a^2 - 2u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$A'(u) = 0 \Rightarrow a^2 - 2u^2 = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow u = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Nur $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ macht Sinn, da $0 \le \frac{a}{\sqrt{2}} \le a$ ist. Wir überprüfen noch

Für $0 \le u \le \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist $0 \le u^2 \le \frac{a^2}{2}$, also $A'(u) = 2 \cdot \frac{a^2 - 2u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \ge 0$

Für $\frac{a}{\sqrt{2}} \le u \le a$ ist $\frac{a^2}{2} \le u^2 \le a^2$, also $A'(u) = 2 \cdot \frac{a^2 - 2u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \le 0$

Somit existiert in $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ein lokales Maximum mit $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a^2$

4.1. (1) Es wird substituiert $x = \sin z \Rightarrow x'(z) = \frac{dx}{dz} = \cos z \Rightarrow dx = \cos z dz$ mit den Grenzen

$z(0) = \arcsin(0) = 0; z(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Außerdem ist $\sqrt{1 - \sin^2(z)} = \cos^2(z)$

(2) Es wird nun partiell integriert (nach Produktregel) indem cos²(z)=cos(z)cos(z) gesetzt wird, wobei u=cos(z)➔u'=-sin(z) und v'=cos(z)➔v=sin(z) ist. Dann ist uv= cos(z) sin(z) und u'v=sin²(z)=1-cos²(z) im 2. Integral. Es steht jetzt eine Gleichung, in der 2mal $\int \cos^2(z) dz$ vorkommt

Beim Übergang von (2)nach(3) wird auf den beiden Seiten der Gleichung $\int \cos^2(z) dz$ addiert

4.2. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}[\sin(z)\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}[z]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$