Hessen-2008-Analysis-A1-LK

Gegeben: $s(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ und $c(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

1.1. (1) $s'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-(-e^{-x})\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=c(x)$

$c'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+(-e^{-x})\right)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=s(x)$

(2) $s(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^x\right)=-\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=-s(x)$

$c(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^x\right)=-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=-c(x)$

(3) $c^2(x)-s^2(x)=\frac{1}{2^2}\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\frac{1}{2^2}\left(e^x-e^{-x}\right)^2=$

$=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}\right)=\frac{1}{4}\left(2e^0+2e^0\right)=1$

1.2. (1) sin'(x)=cos(x) und cos'(x)=-sin(x)
(2) sin(-x)=-sin(x), d.h. punktsymmetrisch
cos(-x)=cos(x), d.h, achsensymmetrisch
(3) $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

2.

- $c'(x)=s(x)=0 \Rightarrow s(x)=e^x-e^{-x}=0 \Rightarrow$ x=0
  c''(0)=s'(0)=c(0)=1>0, also Minimum T(0|1)
- c''(x)=s'(x)=c(x)=0$\Rightarrow e^x+e^{-x}=0$ nicht lösbar, weil $e^x>0$ und $e^{-x}>0$

3.1. $g(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$

(1) $g(0)=a_0=1$

(2) $g(2)=4a_2+2a_1+1=\frac{1}{2}\left(e^2+e^{-2}\right)$

(3) $g(2)=4a_2-2a_1+1=\frac{1}{2}\left(e^2+e^{-2}\right)$

(2)+(3): $8a_2+2=\left(e^2+e^{-2}\right)\Rightarrow a_2=\frac{\left(e^2+e^{-2}\right)-2}{8}\approx 0{,}69$

(2)-(3): $4a_1=0\Rightarrow a_1=0\Rightarrow$

$g(x)=0{,}69x^2+1$

3.2. $\int_{-2}^{2}(g(x)-c(x))dx=\int_{-2}^{2}\left(0{,}69x^2+1-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right)dx=\left[0{,}23x^3+x-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right]_{-2}^{2}=$

$=\left(0{,}23\cdot 8+2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(-0{,}23\cdot 8-2-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2\right)=0{,}23\cdot 16+4-e^2+e^{-2}$

=0,42628

Die Berechnung der Fläche , die von der Näherungsfunktion und der Funktion in einem bestimmten Intervall eingeschlossen wird, kann nur eines von mehreren Gütemaßen sein. Auf jeden Fall müsste $\int_a^b |\,g(x)-c(x)\,|\,dx$ berechnet werden.

4.1. $A(x) = 2x \cdot (p - c(x)) = 2x \cdot (p - \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}) \Rightarrow$

$A'(u) = 2 \cdot (p - \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}) + 2u \cdot (-\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}) = 2p + (-1 - x)e^{x} + (-1 + x)e^{-x} =$

A'(x)=0 $\Rightarrow 2p - (x+1)e^{x} + (x-1)e^{-x} = 0$ und mit $p = c(\pm 2) = \frac{1}{2}\left(e^{2} + e^{-2}\right) \approx 3{,}76$

$\underline{7{,}52 - (x+1)e^{x} + (x-1)e^{-x} = 0}$

4.2. $A(x) = 2x \cdot (p - g(x)) = 2x \cdot (p - 0{,}69x^{2} - 1) \Rightarrow$

$A'(x) = 2 \cdot (p - 0{,}69x^{2} - 1) + 2x \cdot (-1{,}38x) = -4{,}14x^{2} + 5{,}52$

A'(x)=0 $\Rightarrow -4{,}14x^{2} + 5{,}52 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1{,}1547 \Rightarrow$

$A''(x) = -8{,}28x \Rightarrow A''(1{,}1547) < 0$, also ist die maximale Fläche $A(1{,}1547)$ =4,2493

- Lt. Definition von g haben g und c in [-2;2] die gemeinsamen Stellen bei –2;0 und 2. Für eine beliebige Stelle ist $g(x \geq c(x)$, wie man am Beispiel x=1 (g(1)=1,69>1,543=c(1)) leicht erkennen kann.
  Dann ist aber p-g(x)<p-c(x) und damit der berechnete Wert untere Grenze für den wahren Wert.