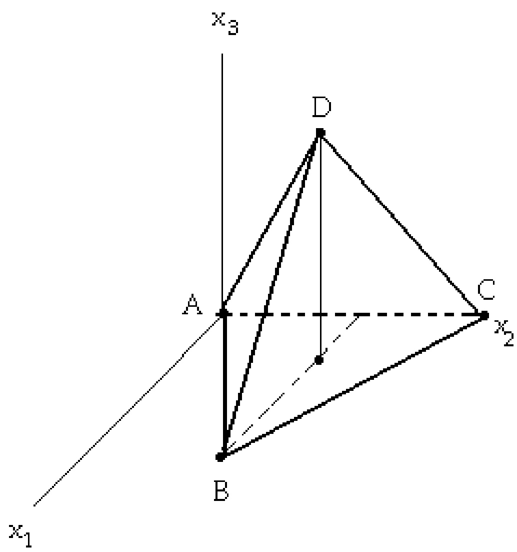


Hessen-2007-Geometrie-B1-LK

A(0|0|0);B(60|35|0);C(0|70|0);D(20|35|50)
a.→

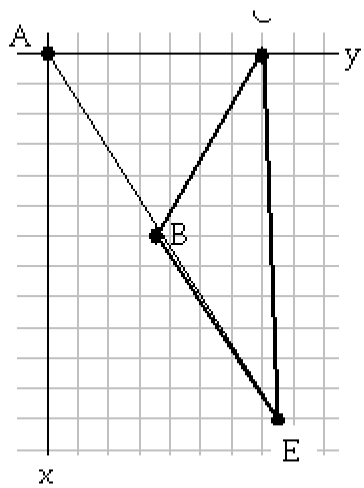
b. $P = r \cdot (20 \mid 35 \mid 50)\,;\, 0 \le r \le 1$ sind Punkte der Kante AD. Der Vektor $\overline{PB}$ muss senkrecht zum Vektor $\overline{AD}$ sein: $\begin{pmatrix} 60-20r \\ 35-35r \\ -50r \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$1200 - 400r + 1225 - 1225r - 2500r = 0 \Leftrightarrow$

$2425 - 400r - 1225r - 2500r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2425}{4125} \approx 0{,}5879$. Der Abstand ist dann

$|BP| = \sqrt{(60-20r)^2 + (35-35r)^2 + (50r)^2} \approx \sqrt{2327{,}33 + 208 + 864} \approx 58{,}3$

mit einer Abweichung von $\frac{0{,}3}{58} \approx 0{,}5\%$. Bedingung ist also erfüllt.



c. Zu berechnen ist der Schnittpunkt E der Geraden $\bar{x} = \overline{OD} + r \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit der x-y- Ebene z=0, also $50 - 5r = 0 \Leftrightarrow r = 10$ →E(120|75|0). Aus der Projektion erkennt man, dass für die Berechnung der Schattenfläche nur das Dreieck BCE in Frage kommt:

$A_{BCE} = \frac{1}{2} |\overline{BC} \times \overline{BE}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -60 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4500 \end{pmatrix} \right| = 2250\,FE$

d. Zu zeigen ist, dass die Strecke von L(120|75|0) und S(-480|-15|300) nicht durch die Pyramide geht. Da L=E ist, muss nur der Schnittpunkt der Geraden $\bar{x} = \overline{OL} + t \cdot \overline{LS}$ $= \begin{pmatrix} 120 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -600 \\ -90 \\ 300 \end{pmatrix}$ mit dem Dreieck BCD bestimmt werden. Dazu berechnen wir zunächst die Ebene E_{BCD} :

$\overline{BD} \times \overline{BC} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -60 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1750 \\ -3000 \\ -1400 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{n} = \begin{pmatrix} 35 \\ 60 \\ 28 \end{pmatrix}$ →

$E_{BCD}: \begin{pmatrix}35\\60\\28\end{pmatrix} * \bar{x} = \begin{pmatrix}35\\60\\28\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix} = 4200$, also $\underline{35x_1 + 60x_2 + 28x_3 = 4200}$. Wir setzen nun die Gerade ein:

$35(120 - 600t) + 60(75 - 90t) + 28 \cdot 300t = 4200 \Leftrightarrow$

$4200 - 21000t + 4500 - 5400t + 8400t = 4200 \Leftrightarrow -18000t = -4500 \Leftrightarrow \underline{t = 0{,}25}$. Der Schnittpunkt mit der Ebene E_{BCD} ist P(-30|52,5|75). Es muss nun festgestellt werden, ob dieser Punkt innerhalb des Dreiecks BCD liegt. Das ist dann der Fall, wenn es Zahlen r,s mit r+s<=1 gibt , sodass $\overline{OP} = \overline{OB} + r \cdot \overline{BC} + s \cdot \overline{BD}$, also:

$\begin{pmatrix}-30\\52{,}5\\75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-60\\35\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-40\\0\\50\end{pmatrix}$. Aus (3) folgt s=1,5. Somit kann der Schnittpunkt nicht im Dreieck BCD liegen.

e. Sei Q ein Punkt auf der Strecke LB, also $\overline{OQ} = \overline{OL} + t \cdot \overline{LB}; 0 \le t \le 1$, dann muss die Gerade $\bar{x} = \overline{OQ} + \lambda \overline{QS}$ und bestimmt werden , für welches t und welches λ genau die Kante DB geschnitten wird: