Hessen-2007-Analysis-A2-LK

$f_k(x)=(1-x)e^{k-kx} = (1-x)e^{k(1-x)}$

a. $f_k'(x)=-e^{k(1-x)}-k(1-x)e^{k(1-x)} = (-1-k+kx)e^{k(1-x)} = \dfrac{-1-k+kx}{e^{k(x-1)}}$

b.

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
  - $f_2(0)=(1-0)e^{2(1-0)}=e^2$, also $S_y=(0\,|\,e^2)$
  - $f_k(x)=(1-x)e^{2(1-x)}=0 \Rightarrow x=1$, also $S_x=(1\,|\,0\,|)$
- Extrempunkte: $f_2'(x)=0 \Rightarrow -3+2x=0 \Leftrightarrow x=1{,}5$
  - $f_2'(x)=\dfrac{-3+2x}{e^{2(x-1)}} \Rightarrow f_2''(x)=\dfrac{2e^{2(x-1)}-2(-3+2x)e^{2(x-1)}}{e^{4(x-1)}} = \dfrac{(8-4x)e^{2(x-1)}}{e^{4(x-1)}} = \dfrac{(8-4x)}{e^{2(x-1)}}$

  ➔ $f_2'(1{,}5)=\dfrac{2}{e^{2(x-1)}}>0$, also Maximum $H\left(1{,}5\middle|-0{,}5e^{-1}\right)$
- Verhalten im Unendlichen:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{2-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{e^{2x-2}}=-0$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(1-x)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{2-2x}}_{\to+\infty}=+\infty$

c. $f_k'(x)=0 \Rightarrow -1-k+kx=0 \Rightarrow x=\dfrac{k+1}{k};k\neq 0$

$f_k''(x)=\dfrac{ke^{k(x-1)}-k(-1-k+kx)e^{k(x-1)}}{e^{2k(x-1)}} = \dfrac{k-k(-1-k+kx)}{e^{k(x-1)}} = \dfrac{2k+k^2-k^2x}{e^{k(x-1)}}$

➔ $f_k''\left(\dfrac{k+1}{k}\right)=\dfrac{2k+k^2-k^2\cdot\dfrac{k+1}{k}}{e^{k(\frac{k+1}{k}-1)}} = \dfrac{2k+k^2-k\cdot(k+1)}{e^1} = \dfrac{k}{e^1}$, d.h.

- für k<0 Maximum $H\left(\dfrac{k+1}{k}\middle|-\dfrac{1}{k}e^{-1}\right)$
- für k>0 Minimum $T\left(\dfrac{k+1}{k}\middle|-\dfrac{1}{k}e^{-1}\right)$
- Berechnung der Ortskurve aller Extrema :

  $\dfrac{k+1}{k}=x \Leftrightarrow k+1=kx \Leftrightarrow k=\dfrac{-1}{1-x}$ ➔ $y=-\dfrac{1}{k}e^{-1}=-\dfrac{1-x}{-1}e^{-1}=(1-x)e^{-1}$

d. Alle Kurven der Schar gehen durch (1|0) (siehe a.)
Aus $x\neq 1$ folgt $f_k(x)=f_l(x) \Leftrightarrow (1-x)e^{k(1-x)}=(1-x)e^{l(1-x)} \Leftrightarrow e^{k(1-x)}=e^{l(1-x)} \Leftrightarrow k=l$,
also gibt es keinen Punkt, den alle Kurven der Schar gemeinsam haben.

e.

- Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion von f_k mit Hilfe der partiellen Integration

  $\int(1-x)e^{k(1-x)}dx=(1-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)-\int\left((-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)\right)dx=$

$$= (1-x)\cdot\left(-\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)-\frac{1}{k}\int e^{k(1-x)}dx = (1-x)\cdot\left(-\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)-\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)=$$

$$= (1-x-\frac{1}{k})\cdot\left(-\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\right)=\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\cdot\left((x-1+\frac{1}{k}\right)\text{mit}$$

$u=(1-x)\Rightarrow u'=-1$ sowie $v'=e^{k(1-x)}\Rightarrow v=-\frac{1}{k}e^{k(1-x)}=\int e^{k(1-x)}dx$

- $\left[\frac{1}{k}e^{k(1-x)}\cdot\left((x-1+\frac{1}{k}\right)\right]_1^b=\frac{1}{k}e^{k(1-b)}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}e^{k(1-1)}\cdot\left((1-1+\frac{1}{k}\right)=$

  $=\frac{1}{k}e^{k(1-b)}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k^2}$

- $\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{k}e^{k(1-b)}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k^2}\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{ke^{k(b-1)}}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)\right)-\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{k^2}=0-\frac{1}{k^2}$, weil

  $\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{ke^{k(b-1)}}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)\right)=0$, weil $\frac{\infty}{e^{\infty}}=0$

- Die Schlussweise gilt natürlich nur wenn $k>0$, da für $k<0$ der Term $e^{k(b-1)}$ gegen Null strebt, somit der Bruch $\frac{1}{ke^{k(b-1)}}$ gegen ∞ und somit:

  $\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{ke^{k(b-1)}}\cdot\left((b-1+\frac{1}{k}\right)\right)=\infty$

  Für $k=0$ ist die Funktion nicht definiert.