Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Im Material ist zu erkennen, dass alle Kanten des rechteckigen Grundrisses der Rampe parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Rampe beginnt außerdem in der Rasenebene und endet in der Bühnenebene. Daher stimmen R_1 und R_2 sowie R_3 und R_4 in ihren x_2- und x_3-Koordinaten überein, außerdem haben R_1 und R_4 sowie R_2 und R_3 gleiche x_1-Koordinaten. Da die Rampe eine Breite von 3 m haben soll, gilt für die Koordinaten der fehlenden Punkte:

$$R_1\,(35 \mid -8 \mid 0)\,; \qquad R_4\,(25 \mid -8 \mid 1)$$

Die Länge der Rampe ergibt sich aus dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{R_1R_4} = \overrightarrow{R_2R_3}$ mit

$$l = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2} = \sqrt{101} \approx 10{,}05$$

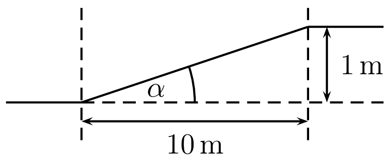
zu etwa 10 m.

Betrag eines Vektors $\vec{a}$:

$$\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Rampe überwindet eine Höhe von 1 m auf einer Strecke im Grundriss von 10 m. Damit ergibt sich für den Steigungswinkel:



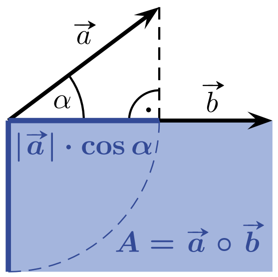
$$\tan(\alpha) = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 5{,}7^\circ$$

Die Rampe verläuft mit einem Winkel von $\alpha = 5{,}7^\circ$ also zu steil, die Norm wird nicht erfüllt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

In diesem Aufgabenteil soll gezeigt werden, dass das Dreieck ABP mit $A(5 \mid 26 \mid 25)$, $B(2 \mid 30 \mid 18)$ und $P(35 \mid 66 \mid 35)$ bei A einen rechten Winkel hat, der Vektor $\overrightarrow{AB}$ also senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{AP}$ steht.

Der Wert des Skalarproduktes ist auch ein Maß für den Winkel, den die Vektoren miteinander einschließen:



$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$

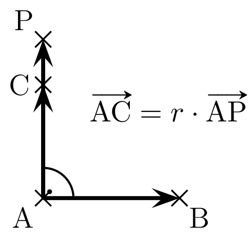
Für $\alpha = 90°$ ist daher wegen $\cos(90°) = 0$ auch $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Die Orthogonalität zweier Vektoren kann über das Skalarprodukt untersucht bzw. gezeigt werden:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \circ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = -90 + 160 - 70 = 0$$

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ ergibt Null, im Dreieck ABP liegt daher bei A ein rechter Winkel vor.

Da sich der variable Punkt C auf der Verbindung von A zu P befindet, ist der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ immer ein Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, so dass der rechte Winkel bei A immer bestehen bleibt. Dieser Sachverhalt ist in der Abbildung rechts zu erkennen.



Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Da das Dreiech ABC rechtwinklig ist, gilt mit $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ für die Fläche des Segeltuches:

$$A = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{2} = \frac{r \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{2}$$

$$= \frac{r \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{74} \cdot 10\sqrt{26}}{2} \approx 219{,}32r$$

Für A=100 m^2 ist $r \approx \frac{100}{219{,}32} \approx 0{,}456$. Damit lassen sich der Ortsvektor des Punktes C sowie seine Koordinaten bestimmen:

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 26 \\ 25 \end{pmatrix} + 0{,}456 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}68 \\ 44{,}24 \\ 29{,}56 \end{pmatrix}$$

Wird die dritte Ecke des Segeltuches im Punkt C(18,68 | 44,24 | 29,56) befestigt, wird die Maximalgröße von 100 m^2 gerade erreicht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Punkt A wird durch den Sonnenstrahlenvektor $\vec{v}$ entlang der Geraden

$$\text{g}: \vec{X} = \overrightarrow{\text{OA}} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 26 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

auf den Bühnenboden projiziert. Die Bühne hat eine Höhe von 1 m, liegt also in einer Ebene mit einer z-Komponente von $z = 1$. Entsprechend wird der Wert des Parameters r so bestimmt, dass $z = 1$ gilt:

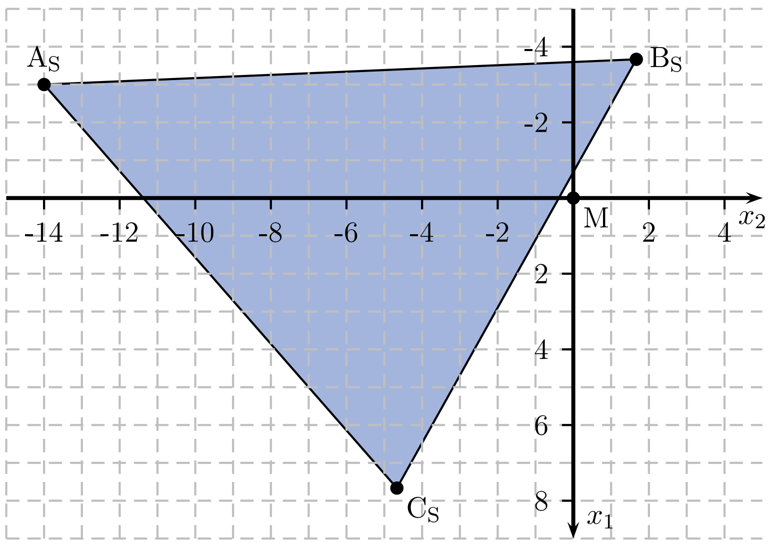
$$z = 25 - 3r = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 8$$

Für den Ortsvektor des Schattenpunktes von A auf dem Bühnenboden gilt damit

$$\overrightarrow{\text{OA}_\text{S}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 26 \\ 25 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Punkt A_S hat die Koordinaten $\text{A}_\text{S}\,(-3 \mid -14 \mid 1)$.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (5 BE)



Das Mikrofon befindet sich nicht im Schatten des Segeltuches.