Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1 (9 BE)

Hier soll die Zuordnungsvorschrift einer Funktion dritten Grades ermittelt werden, deren Graph die Trennlinie auf der gezeigten Brosche beschreibt. Die allgemeine Zuordnungsvorschrift einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Der Graph im Material verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung, so dass

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

direkt abgelesen werden kann. Um die restlichen beiden Parameter zu bestimmen, werden zwei weitere Bedingungen benötigt, die die Funktion erfüllen muss.
Aus dem Material lassen sich die beiden Punkte

$$\mathrm{P}\left(1 \mid -\frac{2}{3}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{N}\,(2 \mid 0)$$

ablesen. Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1a + 1c &= -\frac{2}{3} \\ 8a + 2c &= \quad 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= +\frac{2}{9} \\ b &= -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

Alternativ kann die Zuordnungsvorschrift auch mit Hilfe der Nullstellen der Funktion bestimmt werden. Aus dem Graphen lassen sich die Nullstellen bei $x = 0$ und $x = \pm 2$ direkt ablesen, so dass sich die Zuordnungsvorschrift wie folgt in Linearfaktoren zerlegen lässt:

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Für ganzrationale Funktionen gilt:

Punktsymmetrie zum Ursprung:

- nur ungerade Exponenten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

- nur gerade Exponenten

Der Vorfaktor a lässt sich auch hier wieder über die Koordinaten von P bestimmen, so dass sich durch Ausmultiplizieren wieder die zur Kontrolle angegebene Zuordnungsvorschrift ergibt.

Lösung zu Teilaufgabe 2 (10 BE)

Der im Material schraffierte Bereich lässt sich in zwei Flächen unterteilen: Der obere Teil entspricht einem Viertel des ganzen Kreises und hat die Fläche

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi.$$

Nicht vergessen:

Das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ beschreibt die SUMME aller Funktionswerte der Funktion f im Intervall $[a;b]$, NICHT die Fläche.

Die zweite Teilfläche entspricht dem Betrag des Integrals der Funktion im Bereich von $x = 0$ bis $x = 2$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \int\limits_0^2 \left(\frac{2}{9}x^3 - \frac{8}{9}x \right) \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^2 \right]_0^2 \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{18} \cdot 2^4 - \frac{4}{9} \cdot 2^2 \right) - 0 \right| \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Damit hat der schraffierte Bereich eine Gesamtfläche von

$$A = \left(\pi + \frac{8}{9} \right) \mathrm{cm}^2.$$

Um die benötigte Masse der Legierung zu bestimmen, muss das Volumen der Schicht mit der Dichte der Legierung mutlipliziert werden:

$$\begin{aligned} m &= V \cdot \rho \\ &= A \cdot h \cdot \rho \\ &= \left(\pi + \frac{8}{9} \right) \mathrm{cm}^2 \cdot 0{,}001\,\mathrm{cm} \cdot 12\,{}^{\mathrm{g}}/_{\mathrm{cm}^3} \\ &\approx 0{,}048\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Die für die Brosche benötigte Legierung hat also eine Masse von etwa 48 mg.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a. Dabei bleiben sowohl die Nullstellen als auch die Extrem- und Wendestellen an der gleichen Stelle, lediglich die y-Werte der Extrem- und Wendestellen werden mit dem Faktor a multipliziert.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (9 BE)

Die schraffierte Fläche entspricht der Fläche zwischen den Graphen von g und f für $-2 \leq x \leq 2$. Da beide Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung verlaufen, reicht es aus, die Fläche im Bereich von -2 bis 0 zu berechnen und a so zu bestimmen, dass der Inhalt der Fläche $0{,}8\,\mathrm{cm}^2$ beträgt:

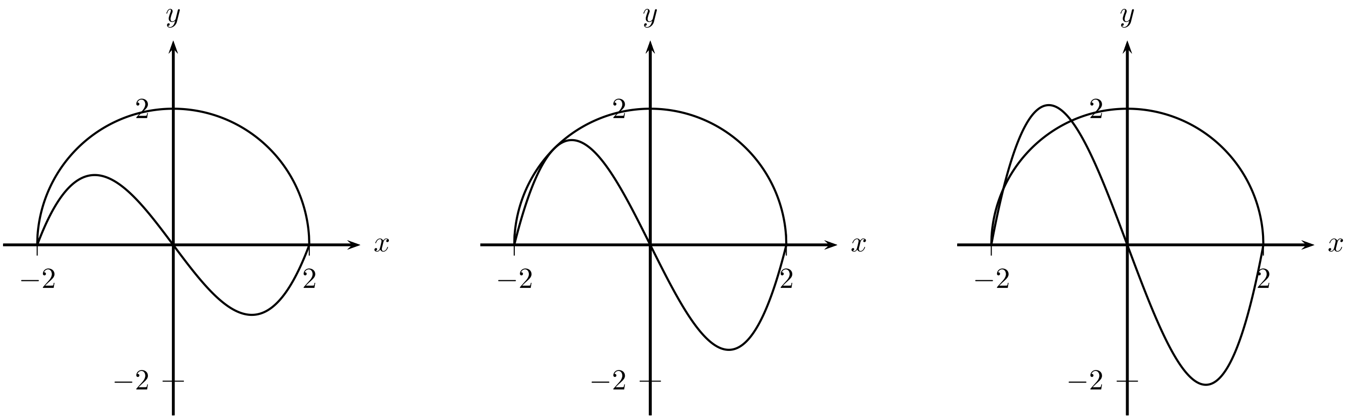
$$\begin{aligned} 0{,}8 &= \int\limits_{-2}^{0} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-2}^{0} (a-1) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (a-1) \cdot \int\limits_{-2}^{0} \frac{2}{9}x^3 - \frac{8}{9}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{9} \cdot (a-1) \end{aligned}$$

$$a = 1{,}9$$

Soll die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen berechnet werden, wird immer die untere Funktion von der oberen Funktion subtrahiert (auf etwaige Schnittpunkte im betrachteten Intervall achten).

Lösung zu Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Im abgebildeten Kästchen werden die Schnittpunkte des Graphen von g mit dem Halbkreis k berechnet, der die obere Begrenzung der Brosche beschreibt.
Hierfür werden in Zeile (1) zunächst beide Zuordnungsvorschriften gleich gesetzt, Zeile (2) gibt die Lösungen dieser Gleichung an. Dabei gibt es zwei konstante Lösungen bei $x = \pm 2$, die weiteren Lösungen werden durch den Wurzelausdruck beschrieben und sind abhängig vom Wert des Parameters a.
Die folgenden Abbildungen zeigen die verschiedenen Möglichkeiten für die gegenseitige Lage von g und k:



Die Nullstellen von g werden durch den Parameter nicht beeinflusst, wodurch sich die beiden Schnittpunkte bei $(\pm 2 \mid 0)$ ergeben. Da a die Streckung des Graphen in y-Richtung beschreibt, kommt es erst für eine ausreichend große Streckung zu einem weiteren gemeinsamen Punkt von g und k, für noch größere Werte von a schneidet g den Halbkreis schließlich in zwei weiteren Punkten.
Mathematisch ergibt sich dieser Sachverhalt aus dem Wert, der in Zeile (2) unter der Wurzel steht (dem Radikanden). Steht unter der Wurzel eine negative Zahl, gibt es keine weiteren Schnittpunkte zwischen beiden Graphen (linkes Beispiel), für einen positiven Wert unter der Wurzel gibt es zwei weitere Schnittpunkte (rechtes Beispiel). Ist der Wert gerade Null, berühren sich g und k gerade in einem weiteren Punkt (mittleres Beispiel).
In Zeile (3) wird der Bereich des Wertes von a bestimmt, für den der Graph von g den Halbkreis berührt oder in zwei weiteren Punkten schneidet, für den der Ausdruck unter der Wurzel also nicht negativ ist. Es ergeben sich Werte von $a \geq 2{,}25$