Abitur 2014 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B1

Drei Punkte A_t, B_t und C_t bewegen sich jeweils entlang einer Geraden:

A_t auf der Gerade g_a: $\overrightarrow{a_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

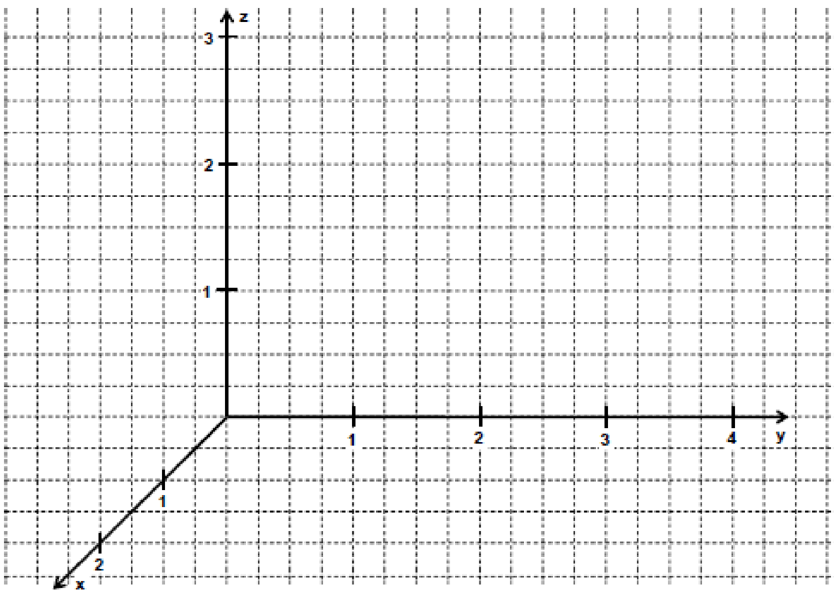
B_t auf der Gerade g_b: $\overrightarrow{b_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

C_t auf der Gerade g_c: $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Punkte A_t, B_t und C_t bilden für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Dreieck $\triangle_t$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Zeichnen Sie in folgendes Koordinatensystem die drei Geraden sowie die Dreiecke $\triangle_0$,$\triangle_1$ und $\triangle_2$ ein.



Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Dreiecke $\triangle_t$ gleichseitig sind.

Teilaufgabe 1.3 (11 BE)

Die Punkte A_t, B_t und C_t legen für jedes t eine Ebene E_t fest.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_t in Parameterform.

Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^2 - t + 1 \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_t ist, und begründen Sie damit die Parallelität der Ebenen.

Bestimmen Sie den Abstand zweier beliebiger dieser Ebenen E_t und E_{t+k} mit $k \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Erläutern Sie die in der unteren Übersicht durchgeführten Rechenschritte und das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$

(2) $A(t) = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}\right|$

(3) $A(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot(t^2 - t + 1)}{2}$

(4) $A'(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t - 1)}{2}; \quad A''(t) = \sqrt{3}$

(5) $\frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t - 1)}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

(6) $A''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$

Die Punkte A_t, B_t und C_t bilden zusammen mit dem Ursprung eine Schar von Pyramiden in Abhängigkeit von t. Das Volumen einer solchen Pyramide kann mit der Formel $V(t) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{a_t} \times \overrightarrow{b_t}\right)\cdot\overrightarrow{c_t}\right|$ berechnet werden.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass $V(t) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3 + 1\right)\right|$ gilt, und bestimmen Sie t so, dass das Volumen $V(t)$ den Wert $\frac{3}{2}$ annimmt.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Untersuchen Sie, ob die Pyramide mit der minimalen Grundfläche auch die Pyramide mit dem minimalen Volumen ist.