Abitur 2013 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B1

In einem Park steht ein festlich geschmückter 30 m hoher Maibaum in der Nähe eines Hanges. Mit Ausnahme dieses Hanges befindet sich der gesamte Park in der x-y-Ebene. Der Hang steigt aus der x-y-Ebene auf und liegt in einer Ebene H, die durch die Gleichung $H : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.
Der Maibaum steht im Punkt $F(3|7|0)$ senkrecht zur x-y-Ebene. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m. Die Spitze des Maibaums liegt also im Punkt $S(3|7|3)$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Hangebene H und berechnen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
[zur Kontrolle: $x + y + 2z = 8$]

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Skizzieren Sie die Hangebene H mithilfe der Achsenabschnitte (Spurpunkte) und zeichnen Sie den Maibaum ein.

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Ein Landschaftsgärtner möchte ein ringförmiges 2 m breites Blumenbeet mit einem inneren Radius von 8 m um den Maibaum herum anlegen. Der Abstand vom Beetrand zum Rand der Hangebene sollte dabei mindestens 3 m betragen. Prüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten wird.

Teilaufgabe 3. (6 BE)

Der Maibaum wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Hangebene H und die x-y-Ebene. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ festgelegt.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt der Spitze S des Maibaumes auf der Hangebene H.
Zeigen Sie, dass der Schatten des Maibaumes im Punkt $R(2|6|0)$ von der x-y-Ebene auf die Hangebene übergeht.

Ein beliebiger Punkt $P(x|y|z)$ soll parallel zum Sonnenstrahlvektor aus Aufgabe 3 auf die Ebene E mit der Gleichung $E : x + y + 2z = 0$ projiziert werden.

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix M.

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Begründen Sie, dass durch die Gleichung $\overrightarrow{OP''} = M \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Abbildung des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene H gegeben ist, d.h. $P'' \in H$.