Abitur 2012 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

Für Skisprungschanzen, auf denen offizielle Wettkämpfe stattfinden, hat der internationale Skiverband (FIS) Normen erstellt. In einer älteren Norm steht:
„Die Anlaufbahn besteht aus einem möglichst geradlinig gestalteten Teil mit der Neigung γ, einem anschließenden kreisförmigen Übergangsbogen mit dem Radius r und dem geradlinig verlaufenden Schanzentisch mit der Neigung α und der Länge t.“

Die Mühlenkopfschanze in Willingen wurde nach ihrem Umbau im Jahr 2000 von der FIS als offizielle Wettkampfstätte anerkannt. Von der Schanze sind folgende Angaben bekannt:
In einem Koordinatensystem (alle Angaben in Metern) beginnt der Anlauf im Punkt $P_A(0|50,64)$.
Der obere geradlinige Teil hat die Länge $56,3\,\text{m}$ und die Neigung $\gamma = 35^\circ$ gegenüber der Horizontalen.
Der kreisförmige Übergangsbogen hat den Mittelpunkt $M(106,36|104,35)$. Der Schanzentisch beginnt im Punkt $P_S(86,32|1,28)$, hat die Länge $6,7\,\text{m}$ und die Neigung $\alpha = 11^\circ$ gegenüber der Horizontalen.
Der gesamte Anlauf, also auch der Schanzentisch, ist nach unten geneigt.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie den Verlauf des Anlaufs in einem Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Geradengleichung für den geradlinigen Anlauf und die Koordinaten des Punktes $P_E\ (x_E|y_E)$, an dem dieser endet.
[zur Kontrolle: $P_E(46,12|18,35)$ (auf 2 Nachkommastellen gerundet)]

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Berechnen Sie m_1 und m_2 gemäß der Definition im nebenstehenden Kasten und anschließend das Produkt $m_1 \cdot m_2$.

(1) m_1 = Steigung des oberen geradlinigen Anlaufteils

(2) m_2 = Steigung der Geraden durch M und P_E

Erklären Sie die Bedeutung des letzten Ergebnisses im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 2. (8 BE)

In der neueren FIS Norm steht, dass die gekrümmte Übergangskurve eine kubische Parabel, d.h. eine Parabel dritter Ordnung, sein darf.
Geben Sie vier Bedingungen an, damit sich die kubische Parabel p_3 mit
$p_3(x) = -0,000028053x^3 + 0,011864312x^2 - 1,61556349x + 70,3757036$ in guter Näherung in den Punkten P_E und P_S ohne Knick und ohne Sprung an die geradlinigen Teile des Anlaufs und des Schanzentisches anschmiegt. Prüfen Sie, ob die Bedingungen für den Punkt P_E erfüllt sind.

Teilaufgabe 3.1 (10 BE)

Erklären Sie, wie sich in dem nebenstehenden Kasten aus (1) die nachfolgenden Zeilen (2), (3) und (4) ergeben.

Bestimmen Sie $y'_{\text{Kreis}}(x)$ unter Verwendung geeigneter Differenziationsregeln.

Beachten Sie folgende Hilfe: $y_{\text{Kreis}}(x) = y_m - \sqrt{R^2 - (x - x_m)^2}$.

$$(1)\quad L_{\text{Bogen}} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'_{\text{Kreis}}(x)^2}\,\mathrm{dx}$$

$$(2)\quad = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{x - x_m}{\sqrt{R^2 - (x - x_m)^2}}\right)^2}\,\mathrm{dx}$$

$$(3)\quad = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right)^2}\,\mathrm{dz}$$

$$(4)\quad = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - z^2}}\,\mathrm{dz}$$

Mit der Beziehung $z = R \cdot \cos(\varphi)$ gilt:

$$(5)\quad L_{\text{Bogen}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \cos(\varphi)^2}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$(6)\quad = R \cdot \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} 1\,\mathrm{d}\varphi$$

$$(7)\quad = R \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)

Wenden Sie das Ergebnis in (7) auf den kreisförmigen Bogen der Schanze an und berechnen Sie damit seine Länge.