

Abitur 2011 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A1

Die nachträgliche Auswertung der Aufzeichnungen des Höhenbarometers eines Heißluftballons ergab, dass sich die Höhe des Ballons über dem Startpunkt der Ballonfahrt für $t > 0$ durch die Funktion $h(t) = 2t^2 \cdot (1,5 - \ln(t))$ beschreiben lässt.

t : Zeit in Stunden

$h(t)$: Höhe in 100 Metern

Der Ballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $h = 0$.

Teilaufgabe 1.1 (17 BE)

Bestimmen Sie die Dauer der Ballonfahrt und die größte erreichte Höhe unter der Annahme, dass der Ballon eine ebene Landschaft überfliegt.

Teilaufgabe 1.2

Geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt der Ballon am stärksten steigt und zu welchem Zeitpunkt der Ballon am stärksten sinkt, und bestimmen Sie zu diesen Zeitpunkten die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit und die jeweilige Höhe.

Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse der vorherigen Aufgabenteile den Graphen von h (Höhenprofil der Ballonfahrt).

Die Ballonhülle eines Heißluftballons wird durch horizontale und vertikale Lastbänder, die in die Hülle eingenäht sind, stabilisiert. Die horizontalen Lastbänder verlaufen wie Fassringe rund um die Hülle. Die vertikalen Lastbänder laufen vom höchsten Punkt des Ballons seitlich herab bis zum runden Brennerahmen, der oberhalb der Austrittsdüse des Brenners sitzt (siehe Abbildung 1 und 2). Am Ballonäquator ist der Umfang des Ballons maximal.

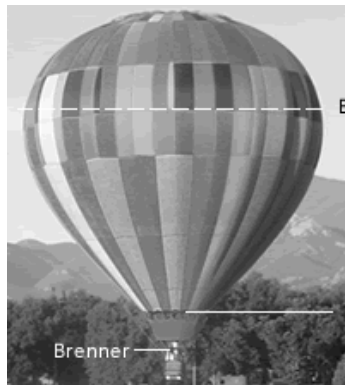


Abbildung 1

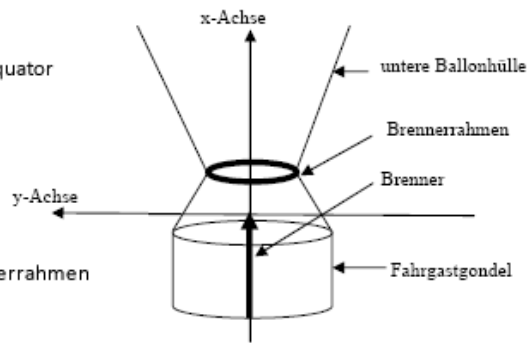


Abbildung 2

Die vertikalen Lastbänder werden durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{20-x} = \frac{1}{4}\sqrt{20x^2-x^3}$ beschrieben, wobei sich der Ursprung des Koordinatensystems an der Austrittsdüse des Brenners befindet und die x -Achse der vertikalen Rotationssymmetrieachse des Ballons entspricht (siehe Abbildung 2)

Teilaufgabe 2.1 (12 BE)

Berechnen Sie die Höhe des Ballons (Austrittsdüse des Brenners bis Ballonspitze) und skizzieren Sie das Querschnittprofil des Ballons in ein geeignetes Koordinatensystem.

Teilaufgabe 2.2

Berechnen Sie die Länge des horizontalen Lastbandes am Ballonäquator sowie den Durchmesser des Brennerahmens, der 1 Meter über der Austrittsdüse des Brenners angebracht ist.

Teilaufgabe 3. (11 BE)

Berechnen Sie das Volumen des Ballons (vom Brennerahmen bis Ballonspitze) über das Rotationsvolumen von f .

Erläutern Sie, wie man mit Hilfe von Zylindern die Formel für das Volumen des Rotationskörpers bestimmt.