Abitur 2011 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B2

Durch die Gleichung $3t \cdot x + 4t \cdot y + 5 \cdot z = 15t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Schar von Ebenen E_t gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (12 BE)

Berechnen Sie den Parameter t so, dass die Ebene E_t durch den Punkt $(2|1|1)$ verläuft. Geben Sie die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen (Spurpunkte) an. Zeichnen Sie die Spurpunkte sowie ihre Verbindungsstrecken (Spurdreieck).

Teilaufgabe 1.2

Berechnen Sie im Spurdreieck der Ebene E_1 den Innenwinkel an der Ecke auf der z-Achse.

Teilaufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass zwei der Spurpunkte aus Aufgabe 1.1 auch Spurpunkte jeder Ebene der Schar sind. Beschreiben Sie die Lage der Ebenen der Schar.

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Bestimmen Sie die Werte von t, für die die Ebenen der Schar vom Koordinatenursprung den Abstand $1\,\text{LE}$ haben.

Durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich definiert.

Teilaufgabe 3.1 (12 BE)

Zeigen Sie, dass die durch M definierte lineare Abbildung folgende Eigenschaften besitzt:

- Alle Punkte der Geraden $g: \overrightarrow{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, werden auf den Ursprung abgebildet.
- Alle Punkte der Ebene $F: 3x + 4y + 5z = 0$ (F liegt parallel zu E_1) werden auf sich selbst abgebildet.

Teilaufgabe 3.2

Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Zeilen (1) bis (4).

Erklären Sie, welche Eigenschaften die durch M definierte lineare Abbildung besitzt.

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{e}, \vec{p}$ mit:

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in F$

und ein beliebiger Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(1) $\vec{x} = a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

(2) $M \cdot \vec{x} = M \cdot (a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}) = a \cdot M \cdot \vec{e} + b \cdot M \cdot \vec{p}$

(3) $= a \cdot \vec{o} + b \cdot \vec{p}$

(4) $= b \cdot \vec{p}$