Aufgabe C1 Landesabitur Hessen 2011 LK

Aufgabe 1 (8 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, an Schweinegrippe zu erkranken, betrug 2009 in Westeuropa durchschnittlich 0,25 %. Es gilt also *p = 0,0025*. Was wird dann durch die folgende Gleichung beschrieben?

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{1000}{i} \cdot (0{,}0025)^{i} \cdot (0{,}9975)^{1000-i} = 0{,}9582$$

Mit diesem Term wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von 1000 zufällig ausgesuchten Personen höchstens fünf an Schweinegrippe erkrankt sind. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt fast 96 %.

Der Binomialkoeffizient $\binom{1000}{i}$ gibt für jedes i ($0 \le i \le 5$) an, auf wie viele Arten *i* Personen aus 1000 zufällig ausgewählt werden können.

Der Faktor $0{,}0025^{i}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass *i* Personen an Schweinegrippe erkrankt sind, der Faktor $0{,}9975^{1000-i}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die anderen (1000 – i) Personen nicht daran erkrankt sind.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten werden für alle *i* (*i* von 0 bis 5) addiert.

Die kumulierte Binomialverteilung kann angewandt werden, weil dem Experiment eine Bernoullikette zu Grunde liegt:

Es gibt nur 2 mögliche Ausgänge (krank oder nicht krank) , die Wahrscheinlichkeiten für krank bzw. nicht krank bleiben nahezu unveränderlich und die Kette kann beliebig verlängert werden (Anzahl der getesteten Personen).

Aufgabe 2.1 (6 BE)

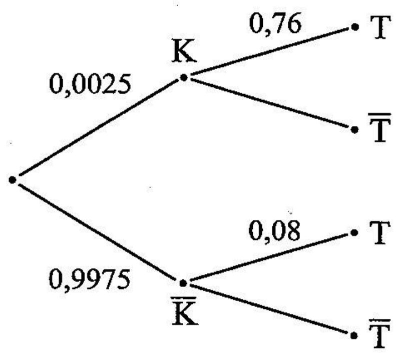
Auf Grund der Angaben kommen folgende 4 Ereignisse in Betracht:

T - Testergebnis ist positiv

$\overline{T}$ - Testergebnis ist negativ

K - die Person ist krank

$\overline{K}$ - die Person ist nicht krank, also gesund



Zur Veranschaulichung des Sachverhalts bietet sich ein Baumdiagramm an, da die gegebenen Zahlen unverändert übernommen werden können

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich erkrankt war.

Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$p_T(K) = \frac{p(K \cap T)}{p(T)} \quad ,$$

dabei ist p(T) die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein positives Testergebnis hat. Diese Wahrscheinlichkeit kann im obigen Baumdiagramm direkt abgelesen werden.

$$p(T) = 0{,}9975 \cdot 0{,}08 + 0{,}0025 \cdot 0{,}76 \approx 0{,}0817$$

$$p(K \cap T) = 0{,}0025 \cdot 0{,}76 = 0{,}0019$$

Daraus folgt:

$$p_T(K) \approx \frac{0{,}0019}{0{,}0817} \approx 0{,}0233$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person tatsächlich an der Schweinegrippe erkrankt ist, liegt also bei mageren 2,3 %.

Aufgabe 2.2 (5 BE)

Die nebenstehende Tabelle zeigt die Entwicklung der Schweinegrippe im Laufe des Herbsts 2009 an. Man sieht, die Wahrscheinlichkeit an der Schweinegrippe zu erkranken, ist von p = 0,0025 auf p = 0,1 gestiegen. Im gleichen Zeitraum ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person auch tatsächlich krank ist, von p = 0,023 auf p = 0,5153, also um das gut 20-fache gestiegen. Wie erklärt sich dieses Phänomen, dass die Aussagekraft des Schnelltests von der Zahl der Erkrankten innerhalb der Bevölkerung abhängt?

p(K)	$p_T(K)$
0,0025	0,0233
0,005	0,0456
0,010	0,0876
0,050	0,3333
0,100	0,5153

Antwort: In der Formel $p_T(K) = \dfrac{p(K \cap T)}{p(T)}$ wird der Nenner p(T) im wesentlichen durch das Produkt $0{,}9975 \cdot 0{,}08$ (also $p(\bar{K} \cap T)$) bestimmt. Er verändert sich also kaum, wenn p(K) zunimmt. Wesentlich größer ist der Einfluss von p(K) auf den Zähler. Der Zähler verdoppelt, verdreifacht sich, wenn sich nur p(K) verdoppelt bzw. verdreifacht. Insofern bewirkt eine Zunahme der Schweinegrippe in der Bevölkerung eine deutlich verbesserte Zuverlässigkeit des Tests im Falle eines positiven Testergebnisses.

Aufgabe 3.1 (6 BE)

Damit die bestellten 50 Millionen Impfdosen ausreichen, dürfen sich höchstens 25 Millionen Leute impfen lassen. Sei X die Anzahl der Impfwilligen, so soll in der Aufgabe gezeigt werden, dass

$$p(X \le 25\,000\,000) \approx 0{,}938 \qquad \text{ist.}$$

X ist binomialverteilt (Begründung siehe Aufgabe 1).

Mit p = 0,3048 folgt:

$$\mu = n \cdot p = 82\,000\,000 \cdot 0{,}3048 = 24\,993\,600 \qquad \text{und}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 4168$$

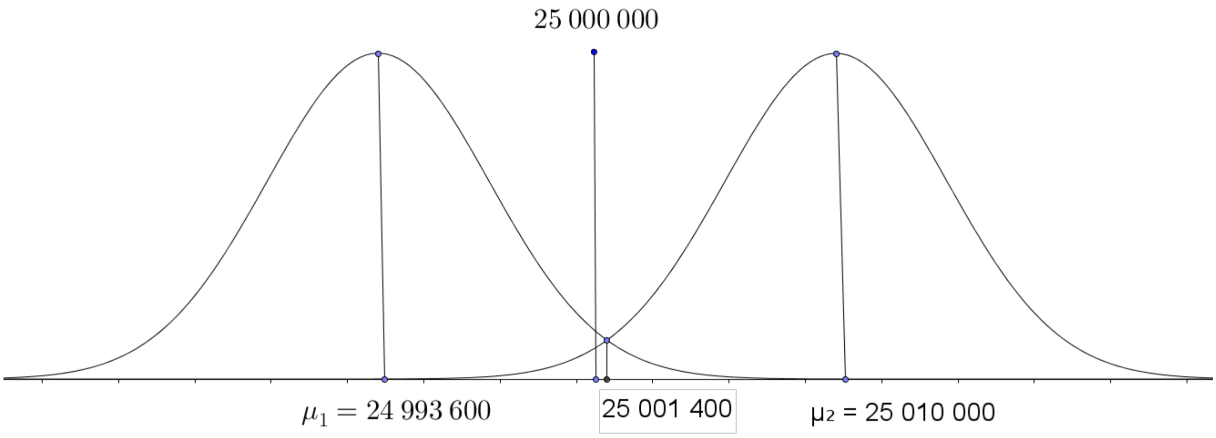
Da $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung) kann die Normalverteilung als Näherung für die Binomialverteilung eingesetzt werden.

Mit $z = \dfrac{k+0,5-\mu}{\sigma} = \dfrac{25000\,000,5 - 24993600}{4168} \approx 1,54$ gilt mit Hilfe der Tabelle zur Normalverteilung:

$\Phi(1,54) \approx 0,9382$ (also Übereinstimmung mit der Angabe)

Aufgabe 3.2 (5 BE)

Rechnet man an Stelle der gegebenen Wahrscheinlichkeit p = 0,3048 mit der gerundeten Wahrscheinlichkeit p = 0,305, so erhält man ein völlig abweichendes Ergebnis. (siehe Kasten in der Angabe) Danach reichen die 50 000 000 Dosen gerade mal mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,82 % aus. Wie erklärt sich dieser eklatante Unterschied zu 93,82 % im Aufgabenteil 3.1?
Auf Grund der besseren Darstellbarkeit benütze ich in den folgenden Zeichnungen die Gauß'sche Dichtefunktion $\varphi(x)$ zur Veranschaulichung der Binomialverteilung



Der linke Graph beschreibt die zu p = 0,3048 gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dabei gilt: Erwartungswert $\mu_1 = 24993600$ und Standardabweichung $\sigma_1 = 4168,4$

Der rechte Graph beschreibt die zu p = 0,3050 gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dabei gilt: Erwartungswert $\mu_2 = 25010000$ und Standardabweichung $\sigma_2 = 4169,2$

Der Schnittpunkt der beiden Graphen liegt bei $X \approx \mu_1 + 1,96 \cdot \sigma_1 \approx \mu_2 - 1,96 \cdot \sigma_2 \approx 25001400$.
Dieser Wert liegt ganz nahe bei X = 25 000 000, das ist die Zahl impfwilliger Personen, die nicht überschritten werden darf, sollen die bestellten 50 000 000 Impfdosen ausreichen.

Die große Bevölkerungszahl n = 82 000 000 sorgt dafür, dass die beiden Erwartungswerte relativ weit auseinanderliegen. Ihr Abstand beträgt ungefähr $3,92 \cdot \sigma \approx 4 \cdot \sigma$.
Die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen überschneiden sich daher kaum. Links von 25 000 000 erhält man also Wahrscheinlichkeiten, die

im Falle p = 0,3048 $p\left(X \le \mu_1 + 1{,}96 \cdot \sigma_1\right) \approx 95\%$ und

im Falle p = 0,3050 $p\left(X \le \mu_2 - 1{,}96 \cdot \sigma_2\right) \approx 2{,}5\%$ entsprechen.

Anschaulich ist damit der große Unterschied in den beiden Ergebnissen geklärt.

In der Abituraufgabe müsste der Minister 25016420 Impfdosen bestellen, also 16420 mehr, um auch auf die hohe Sicherheitswahrscheinlichkeit von 93,8 % zu kommen.

Nicht mehr lösungsrelevant :

In dem folgenden Beispiel sieht man, dass bei relativ kleinem n und nahe beieinander liegenden Wahrscheinlichkeiten nur eine einzige Ampulle mehr bestellt werden muss, um ein 95%-iges Sicherheitsniveau zu erreichen

Aus Erfahrung weiß man, dass 30,4 % der Betroffenen auch tatsächlich die Grippeimpfung durchführen lassen. Wie viele Ampullen mit Impfstoff müssen bestellt werden, damit die Menge mit einer Sicherheit von 95 % ausreicht?

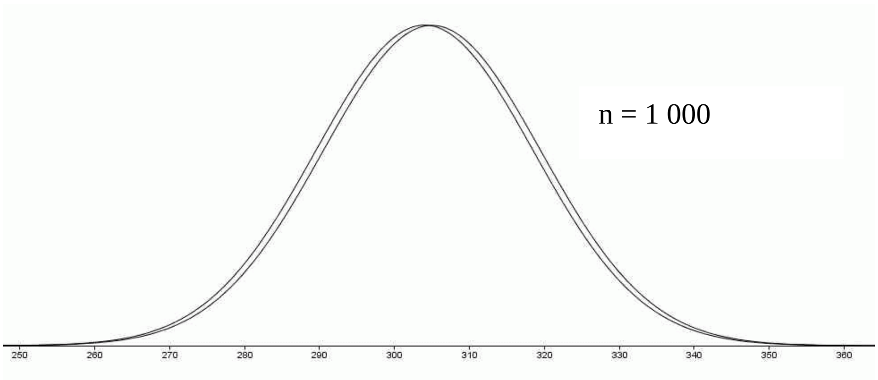
Es gilt $\Phi(z) = 0{,}95$ daraus folgt nach Tabelle z = 1,6449 mit

$$\begin{aligned} z &= \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma} = \frac{k+0{,}5-304}{14{,}546} = 1{,}6449 \\ k - 303{,}5 &\approx 23{,}927 \\ k &\approx 327{,}4 \end{aligned}$$

d.h. bei einer Bestellung von 328 Ampullen hat man eine 95 %-ige Sicherheit, dass der Impfstoff reicht. Ändert man in dieser Aufgabe die Impfwahrscheinlichkeit von 30,4 % zu 30,5 %, ab ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned} z &= \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma} = \frac{k+0{,}5-305}{14{,}559} = 1{,}6449 \\ k - 304{,}5 &\approx 23{,}948 \\ k &\approx 328{,}4 \end{aligned}$$

das heißt, man muss gerade mal eine Ampulle mehr bestellen. Der Unterschied der Erwartungswerte ist relativ gering, die Graphen der Verteilungen überlappen sich fast vollständig (siehe Skizze)


n = 1 000
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360

