Aufgabe B2 Landesabitur Hessen 2011 LK

Aufgabe 1.1 (5 BE)

Durch $3tx + 4ty + 5z = 15t \;,\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Ebenenschar E_t gegeben.

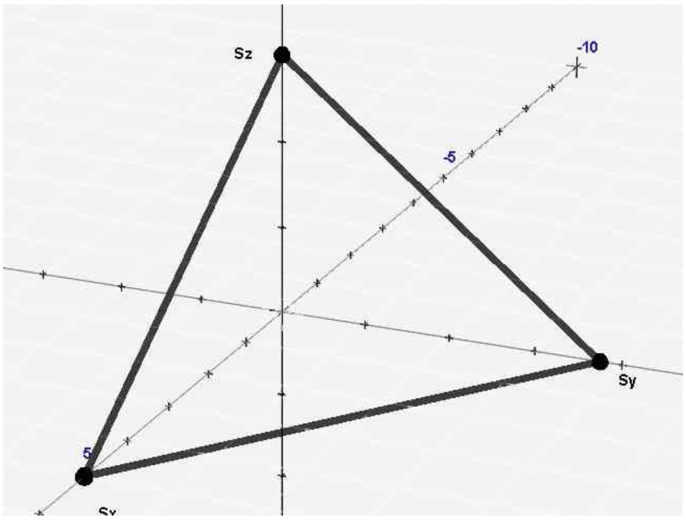
Soll eine der Scharebenen durch den Punkt P (2 | 1 | 1) verlaufen, muss dieser Punkt die Ebenengleichung erfüllen. Gesucht ist also eine Lösung der Gleichung

$$3t \cdot 2 + 4t \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 15t \quad \Leftrightarrow \quad 6t + 4t + 5 = 15t \quad \Leftrightarrow \quad 5t = 5 \;\Leftrightarrow\; t = 1$$

Die Ebene hat also die Gleichung $E_1 : 3x + 4y + 5z = 15$.

Zur Berechnung der 3 Spurpunkte (Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen) verwendet man am geschicktesten die Achsenabschnittsform der Ebenengleichung. Dazu teilt man beide Seiten der Gleichung durch 15 und erhält:

$$\frac{3x}{15} + \frac{4y}{15} + \frac{5z}{15} = 1$$
$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3{,}75} + \frac{z}{3} = 1$$



damit erhält man die Spurpunkte

S_x (5 | 0 | 0) ,

S_y (0 | 3,75 | 0) und

S_z (0 | 0 | 3)

Aufgabe 1.2 (4 BE)

Mit den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{S_zS_x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_zS_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,75 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich für den

Winkel γ mit dem Scheitelpunkt S_z $\cos(\gamma) = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3,75 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3,75 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} \approx 0,3214 \;\Rightarrow\; \gamma \approx 71,3°$

Aufgabe 1.3 (3 BE)

Einsetzen der 3 Spurpunkte in die gegebene Ebenengleichung ergibt für

S_x : 15t = 15t d.h. S_x liegt in E_t

S_y : 15t = 15t d.h. S_y liegt in E_t und für

S_z : 15 = 15t d.h. S_z liegt in E_t nur für t = 1

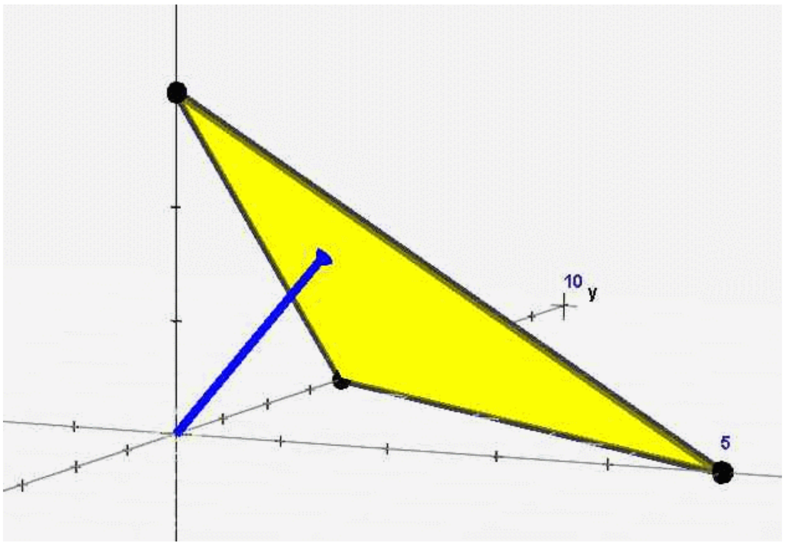
Alle Ebenen der Schar E_t haben also eine gemeinsame Schnittgerade durch die Punkte S_x und S_y . Sie bilden ein sogenanntes Ebenenbüschel.

Aufgabe 2 (6 BE)

In der Skizze ist der Abstand der Ebene

$E_1 : 3x + 4y + 5z = 15$

vom Nullpunkt eingezeichnet (blau).



Er hat eine Länge von $\sqrt{4,5}$ (nicht gefragt).

Soll dieser Abstand die Länge 1 haben, muss sich der Punkt

© Abiturloesung.de

S_z zum Nullpunkt hin bewegen.

Der einfachste Weg zur Berechnung des Abstands eines Punktes von einer Ebene läuft über die Hessesche Normalenform. Hier noch mal die Regel, falls die Ebenengleichung in Koordinatenform vorliegt :

> Ist ax + by + cz = e eine Koordinatengleichung der Ebene E und $P(p_1|p_2|p_3)$ ein beliebiger Punkt, so ist
>
> $$d = \left| \frac{a \cdot p1 + b \cdot p2 + c \cdot p3 - e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$
>
> der Abstand des Punktes P von der Ebene.
>
> Dabei handelt es sich um einen „gerichteten“ Abstand. Ist
>
> $a \cdot p1 + b \cdot p2 + c \cdot p3 - e < 0$ liegen P und der Ursprung auf derselben Seite von E
>
> $a \cdot p1 + b \cdot p2 + c \cdot p3 - e = 0$ liegt P in der Ebene E
>
> $a \cdot p1 + b \cdot p2 + c \cdot p3 - e > 0$ liegen P und der Ursprung auf verschiedenen Seiten von E

Angewandt auf die Aufgabe folgt:

$$d = \left| \frac{3t \cdot 0 + 4t \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 15t}{\sqrt{9t^2 + 16t^2 + 25}} \right| = \left| \frac{-15t}{\sqrt{25t^2 + 25}} \right| = 1$$

Daraus folgt:

$$|-15t| = \sqrt{25t^2 + 25} \quad | \, (\ )^2$$

$$225t^2 = 25t^2 + 25$$

$$t^2 = \frac{25}{200} = 0{,}125$$

$$t = \pm\sqrt{0{,}125}$$

Der Punkt S_z liegt dann bei S_z (0 | 0 | 1,0606) bzw. S_z (0 | 0 | -1,0606).

 © Abiturloesung.de

Aufgabe 3.1 (7 BE)

Diese Aufgabe betrifft den Bereich der linearen Abbildungen. Zunächst soll gezeigt werden, dass $M \bullet \vec{x} = \vec{0}$ ergibt, wenn $\vec{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der durch

$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$ definierten Nullpunktgeraden g ist. Das erreicht man durch einfaches

Nachrechnen nach den Regeln der Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$M \bullet \overrightarrow{x} = M \bullet \left(r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = r \cdot M \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9-4-5 \\ -3+8-5 \\ -3-4+7 \end{pmatrix} = \frac{r}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Außerdem ist zu zeigen, dass durch die Matrix M eine Abbildung definiert ist, die jeden Punkt P (mit dem Ortsvektor $\vec{p}$) der Ebene F mit F : 3x + 4y + 5z = 0 auf sich selbst abbildet, d.h. dass $M \bullet \vec{p} = \vec{p}$ gilt. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene F

kann durch $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

(Auflösung der Ebenengleichung nach z)

Eine Einsetzübung analog zum ersten Teil der Aufgabe liefert das gewünschte Ergebnis:

$$M \bullet \vec{p} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9x - 4y + 3x + 4y \\ -3x + 8y + 3x + 4y \\ -3x - 4y - \frac{21}{5}x - \frac{28}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{pmatrix} = \vec{p}$$

Aufgabe 3.2 (5 BE)

Was bedeuten die 4 Zeilen geometrisch, falls M die Matrix aus Aufgabenteil 3.1 sein soll, der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, und der Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene F beschreibt.

(1) $\vec{x} = a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}$

Der Vektor $\vec{x}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{p}$ darstellen. Der Vektor ist also Ortsvektor eines beliebigen Punktes im $\mathbb{R}^3$.

(2) $M \bullet \vec{x} = M \bullet (a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}) = M \bullet a \cdot \vec{e} + M \bullet b \cdot \vec{p} =$
$= a \cdot M \bullet \vec{e} + b \cdot M \bullet \vec{p}$

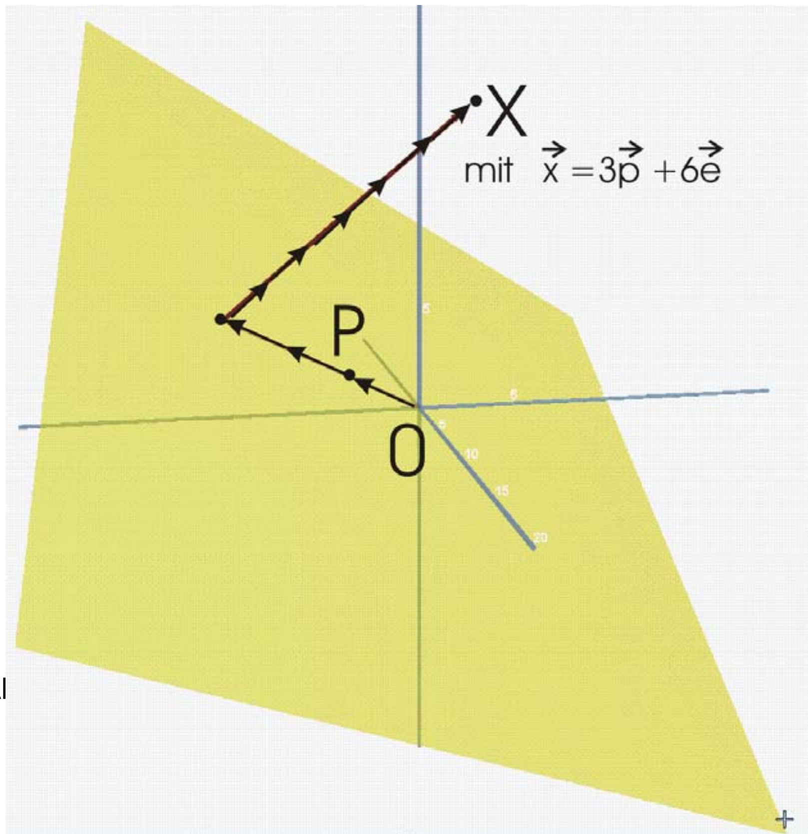
Durch M wird der Vektor $\vec{x}$ linear abgebildet.
Eigenschaften der Matrix-Vektor-Multiplikation (z.B. Distributivität) werden ausgenutzt.

(3) $M \bullet \vec{x} = a \cdot \vec{0} + b \cdot \vec{p}$

Der Vektor $\vec{e}$ wird analog zu Aufgabe 3.1 auf den Nullvektor, der Vektor $\vec{p}$ wird auf sich selbst abgebildet.

(4) $M \bullet \vec{x} = b \cdot \vec{p}$

Der Vektor $\vec{x}$ wird somit auf ein Vielfaches von $\vec{p}$ abgebildet.



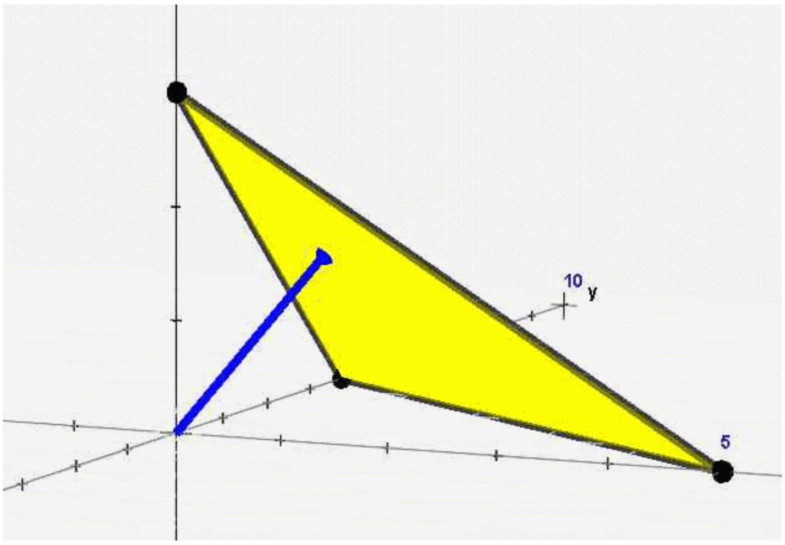
Interpretation: Jeder beliebige Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ wird auf einen Vektor in der Ebene F abgebildet. Dieser bleibt bei einer weiteren Anwendung von M fix.

Die lineare Abbildung beschreibt also eine Projektion des Raumes auf die Ebene F in Richtung der Geraden g.

© Abiturloesung.de

graphische Darstellung mit a = 6 und b = 3

Lösung der Aufgabe 2



mit dem Lotfußpunktverfahren:
(Ohne Formel)

Gesucht ist die Gleichung einer Geraden g durch den Nullpunkt, die senkrecht zur Ebene E_t steht (blau), Dann berechnet man den Schnittpunkt S dieser Geraden mit der Ebene E_t.

Die Länge dieses Vektors $\overrightarrow{0S}$ muss gleich 1 sein. Daraus lässt sich t berechnen.

Also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 5 \end{pmatrix}$ eingesetzt in $E_t = 3tx + 4ty + 5z = 15t$ ergibt:

$$3t(3ts) + 4t(4ts) + 5(5s) = 15t$$

$$9st^2 + 16st^2 + 25s = 15t$$

$$s\left(25t^2 + 25\right) = 15t$$

$$s = \frac{15t}{25t^2 + 25}$$

$$s = \frac{3t}{5t^2 + 5}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt S zu

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3t}{5t^2 + 5} \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9t^2}{5t^2 + 5} \\ \frac{12t^2}{5t^2 + 5} \\ \frac{15t}{5t^2 + 5} \end{pmatrix}$$

 © Abiturloesung.de

Da die Länge dieses Vektors gleich 1 sein soll, hat man die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{81t^4}{\left(5t^2+5\right)^2}+\frac{144t^4}{\left(5t^2+5\right)^2}+\frac{225t^2}{\left(5t^2+5\right)^2}}=1$$

Quadrieren auf beiden Seiten:

$$\frac{81t^4}{\left(5t^2+5\right)^2}+\frac{144t^4}{\left(5t^2+5\right)^2}+\frac{225t^2}{\left(5t^2+5\right)^2}=1$$

Multiplikation mit dem Nenner, Anwenden der ersten binomischen Formel und Zusammenfassen:

$$225t^4+225t^2=25t^4\ 50t^2+25$$
$$200t^4+175t^2-25=0$$

Mit Hilfe der Substitution $u=t^2$ folgt

$$200u^2+175u-25=0 \text{ und damit } u_1=-1 \text{ und } u_2=\frac{1}{8}$$

Rücksubstitution ergibt die bereits vorher gefundenen Lösungen $\pm\sqrt{\frac{1}{8}}$

© Abiturloesung.de

Zu Aufgabe 3

Abschließend möchte ich noch zur Abrundung der Teilaufgabe 3 eine Ergänzung vorstellen, die evtl. zum Verständnis des Ganzen dient, zumal das Thema Matrizen und Abbildungen relativ neu als verbindliches Thema im HLA aufgenommen wurde. Ich stelle die **umgekehrte** Frage.

Wie sieht die Matrixdarstellung einer „schrägen" Projektion aller Punkte des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene F in Richtung des Vektors $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ aus?

Zunächst ein Überblick über das Verfahren:

Bestimmung von Abbildungsmatrizen in 2 klassischen Fällen :

1.	Projektion auf Ebene durch Koordinatenachse	a) schräg	b) orthogonal
2.	Spiegelung an Ebene durch Koordinatenachse	a) schräg	b) orthogonal

Die 4 Fälle lassen sich durch ein modifizierbares Rechenverfahren bearbeiten. An einem Beispiel soll das Verfahren vorgestellt werden, die Modifizierungen werden am Schluss des Verfahrens erläutert.

Ein Punkt P (x|y|z) wird an der Ebene E : x - 3z = 0 gespiegelt (orthgonal).

Bestimme die Abbildungsmatrix.

Vorgehensweise : P (x | y | z) beliebiger Punkt ; Koordinaten von $P'=(x'|y'|z')$ gesucht

Richtungsvektor der Senkrechten (Normalenvektor) $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

Ebenengleichung x - 3z = 0

Gleichung der dazu senkrechten Geraden $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunktes Gerade-Ebene x + t - 3 (z – 3t) = 0

10t + x – 3z = 0

t = - 0,1x + 0,3z

Jetzt kommt der entscheidende Schritt:

Berechnung des Bildpunktes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(-0{,}1x + 0{,}3z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ (*)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8x + 0{,}6z \\ y \\ 0{,}6x - 0{,}8z \end{pmatrix}$$

und damit die Abbildungsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & -0{,}8 \end{pmatrix}$

a) Bei einer schrägen Spiegelung wird lediglich der Vektor $\vec{n}$ durch einen beliebigen anderen („schrägen“) Vektor ersetzt. (z.B. Richtung der Sonnenstrahlen etc.) Alle Rechnungen dann analog.

b) Bei einer orthogonalen oder schrägen Projektion muss nur der Parameter t in der Zeile (*) **nicht** verdoppelt werden. Alles andere wie gehabt.

Wendet man diese Methode auf die Ebene F : 3x + 4y + 5z = 0 und die Gerade

$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ an so folgt (Fall 1a)

P (x | y | z) beliebiger Punkt ; Koordinaten von $P' = (x' | y' | z')$ gesucht

Richtungsvektor der Projektion) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung 3x +4y + 5z = 0

Gleichung der „schrägen“ Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunktes Gerade - Ebene 3(x + t) +4(y + t) +5(z+t) = 0

12t = -3x –4y –5z

$$t = -\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} - \frac{5z}{12}$$

Jetzt kommt der entscheidende Schritt:

Berechnung des Bildpunktes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(-\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} - \frac{5z}{12}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{12}x - \frac{4}{12}y - \frac{5}{12}z \\ -\frac{3}{12}x + \frac{8}{12}y - \frac{5}{12}z \\ -\frac{3}{12}x - \frac{4}{12}y + \frac{7}{12}z \end{pmatrix}$$

und damit die Abbildungsmatrix $S = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

 © Abiturloesung.de