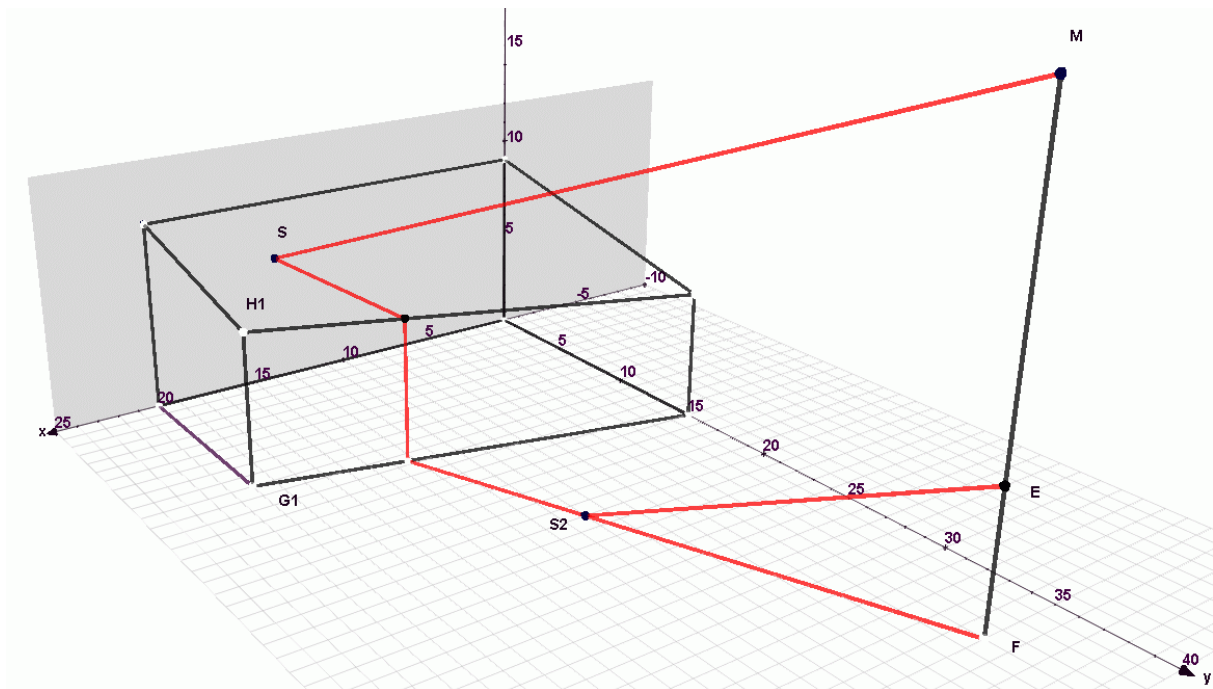


Aufgabe B1 Landesabitur Hessen 2011 GK

Aufgabe 1.1 (6 BE)

Durch einfache Addition der z -Koordinaten zu den bereits bekannten Punkten G_1, G_2, G_3 und G_4 erhält man die Eckpunkte der Dachflächen

$$H_1(20 | 10 | 7), \quad H_2(0 | 15 | 6), \quad H_3(0 | 0 | 9) \text{ und } H_4(20 | 0 | 9)$$



Aufgabe 1.2 (6 BE)

Die Parameterform der Dachfläche lautet:

$$\begin{aligned} E_{\text{Dach}} : \vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20-0 \\ 0-0 \\ 9-9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20-0 \\ 10-0 \\ 7-9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= 20r + 20s & \text{(I)} \\ y &= 10s & \text{(II)} \\ z &= 9 - 2s & \text{(III)} \end{aligned}$$

Das Eliminationsverfahren liefert einen schnellen Weg zur Bestimmung der Koordinatenform :

Aus (II)+5·(III) folgt $y + 5z = 45$

Gleichung (I) ist zur Herleitung der Koordinatenform nicht erforderlich.

Ein weiterer Weg zur Erzeugung der Koordinatenform benutzt den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ der Dachebene. Es gilt } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \text{ und daraus folgt durch}$$

ausmultiplizieren $y + 5z - 45 = 0$ und daraus $y + 5z = 45$

Aufgabe 2.1 (5 BE)

Gesucht ist der Schnittpunkt S der Schattengeraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

durch die Mastspitze $M(4 | 35 | 20)$ und Richtungsvektor \vec{v} mit der Dachfläche.

Die Gleichung der Dachfläche ist bekanntlich $y + 5z = 45$

Aus der Geradengleichung folgt $x = 4 + 2t$ $y = 35 - 5t$ und $z = 20 - 2t$

Und damit:

$$35 - 5t + 5(20 - 2t) = 45$$

$$135 - 15t = 45$$

$$15t = 90$$

$$t = 6$$

Für $t = 6$ liefert die Geradengleichung den Schnittpunkt $S(16 | 5 | 8)$

Aufgabe 2.2 (5 BE)

$E(4 | 35 | 6)$, der Aufpunkt der Geraden g , ist ein Punkt des Mastes. Der Richtungsvektor entspricht der Richtung der Sonnenstrahlen. P wirft also einen Schatten auf den Erdboden (in der x - y -Ebene), der im Punkt $S_2(10 | 20 | 0)$ endet.

Folglich verläuft der Schatten des ganzen Mastes von $F(4 | 35 | 0)$ ausgehend geradlinig über S_2 bis zur Wand des Anbaus. Von dort verläuft er senkrecht an der Wand hoch, da der Mast ebenfalls senkrecht zur x - y Ebene steht. Auf dem Dach verläuft der Schatten dann geradlinig bis zum Punkt S

In der Skizze ist der Verlauf der Schattenebene an den rot gezeichneten Strecken erkennbar.

Aufgabe 3 (8 BE)

Es sind 2 Aussagen zu beweisen:

- 1) Die gegebene Gerade h liegt in der Dachebene und
- 2) Die Gerade verläuft orthogonal (senkrecht) zur Richtung der Sonnenstrahlen.

Zu 1) Einsetzen von h in die Koordinatenform liefert:

$$(5 + 15r) + 5(8 - 3r) = 45$$
$$45 = 45$$

daraus folgt die 1. Behauptung

Zu 2) Nachweis über das Skalarprodukt :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-13) + (-3) \cdot 15 + (-2) \cdot (-3) = 39 - 45 + 6 = 0$$

ergibt die Richtigkeit der 2. Aussage, da zwei Vektoren genau dann senkrecht zueinander sind, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt