Aufgabe A2 Landesabitur Hessen 2011 GK

Aufgabe 1.1 (14 BE)

Die Funktion $h(t) = -0,5t^3 + 2t^2 + t$ gibt die Höhe eines Ballons (in 100 Metern) nach t Stunden an. Der Ballon startet zum Zeitpunkt t = 0 in der Höhe h = 0 . Die Dauer der Fahrt ergibt sich aus der nächstfolgenden Nullstelle von h.

$$-0,5t^3 + 2t^2 + t = 0$$
$$-0,5t \cdot \left(t^2 - 4t - 2\right) = 0$$

$$-0,5t = 0 \qquad t^2 - 4t - 2 = 0$$
$$t_1 = 0 \qquad t_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4+2} = 2 \pm \sqrt{6}$$
$$t_2 \approx 4,449$$
$$t_3 \approx -0,449$$

Daraus ergibt sich die einzig sinnvolle Dauer der Fahrt von rund 4,45 Stunden.

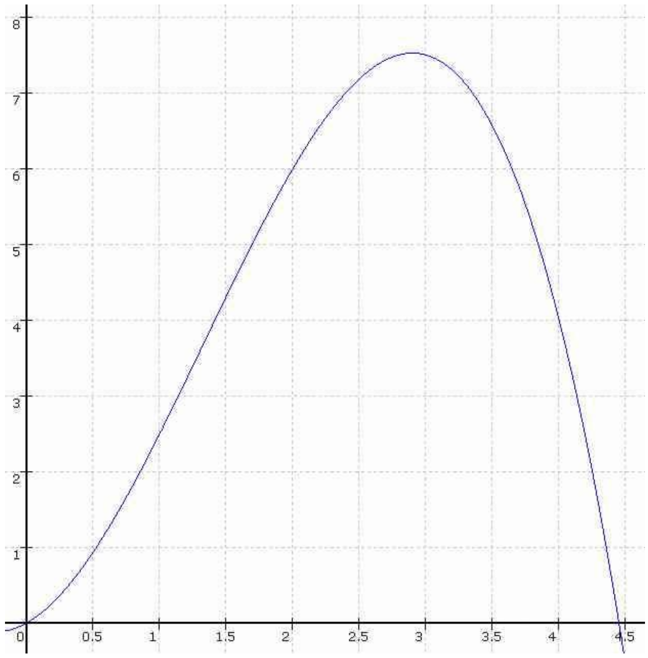
Die größtmögliche Höhe liefert der Hochpunkt des Graphen im Intervall $0 \le t \le 4,45$

Mit $h'(t) = -1,5t^2 + 4t + 1$ und $h''(t) = -3t + 4$ folgt

$$-1,5t^2 + 4t + 1 = 0$$
$$t_4 \approx 2,897$$
$$t_5 \approx -0,230$$

Für die Lösung $t_4 \approx 2,897$ ergibt die hinreichende Bedingung $h''(2,897) \approx -4,691 < 0$ ein relatives Maximum. Mit h(2,897) $\approx 7,526$ erhält man die maximale Höhe von 752,6 m nach einer Fahrtzeit von 2,897 Stunden

Aufgabe 1.2 (5 BE) und 1.3 (3 BE)



Gesucht ist der Wendepunkt. Mit
$h''(t) = -3t + 4 = 0$ und $h'''(t) = -3 < 0$
erhält man $t_6 \approx 1,\overline{3}$ Stunden ,
$h'''\left(\frac{4}{3}\right) = -3 < 0$ und $h(1,\overline{3}) \approx 3{,}704$.

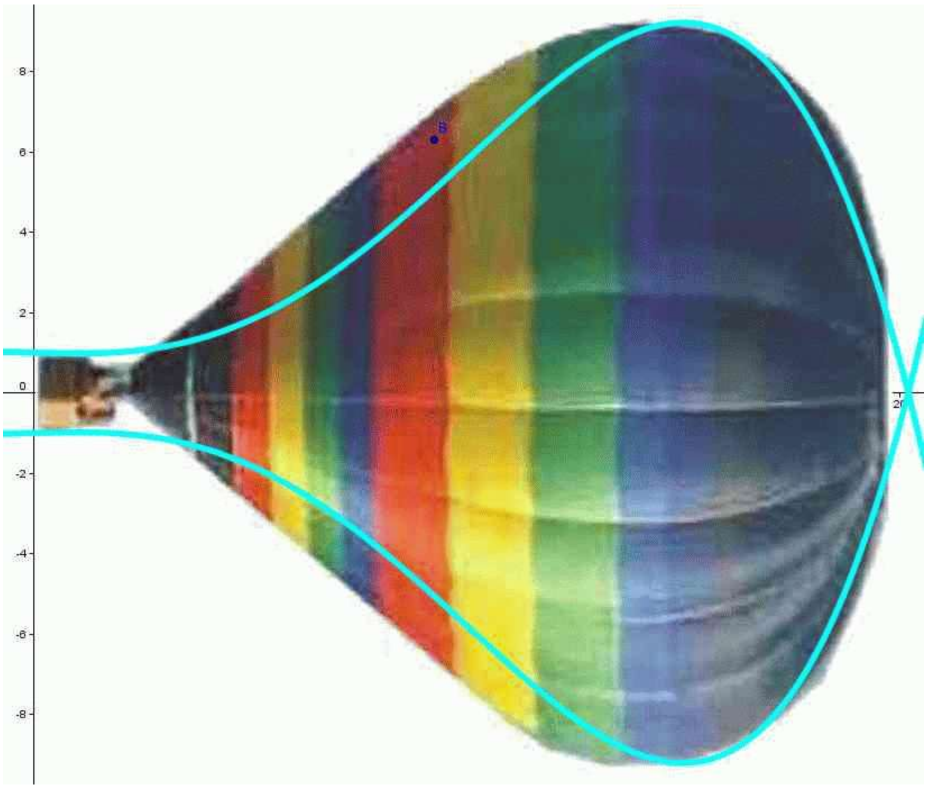
Der Ballon erreicht also nach 1 Stunde und 20 Minuten Fahrtzeit eine Höhe von 370,4 m. Dort ist der Wendepunkt des Graphen. Da die dritte Ableitung < 0 ist, wechselt der Graph der Funktion von einer Links- in eine Rechtskurve. In diesem Moment hat der Ballon seine maximale Steiggeschwindigkeit erreicht.

Nicht gefragt aber sinnvoll : In diesem Moment hat er eine Steiggeschwindigkeit von $h'(1,\overline{3}) \approx 3,\overline{6}$ also 366,7 Meter pro Stunde oder ca. 6,1 Meter pro Minute.

Aufgabe 2.1 (4 BE)

$f_2(x)$ gehört zum Graphen im 1. Quadranten, weil der Hauptkoeffizient vor x^4 negativ ist. Die Parabel ist damit nach unten geöffnet. Außerdem hat $f_2(x)$ ein positives Absolutglied.

Aufgabe 2.2 (3 BE)



Eine Bild-in-Bild-Darstellung lässt die Schwachstellen der graphischen Darstellung im Vergleich zur Realität erkennen. Die Graphen der beiden Parabeln haben am Anfang ein anderes Krümmungsverhalten als der Ballon. Während die Silhouette des Ballons am Anfang nahezu linear ansteigt bzw. fällt wechselt der Graph im 1. Quadranten von einer Links in eine Rechtskurve, im 4. Quadranten umgekehrt

Auch die Abplattung an der Ballonspitze wird nicht dargestellt

Aufgabe 2.3 (3 BE)

Die Ableitung von $f_1(x)$ ist

$$f_1'(x) = \frac{1}{500}x^3 - \frac{3}{100}x^2 - \frac{1}{500}x + \frac{3}{100}$$
$$= \frac{1}{500}\cdot\left(x^3 - 15x^2 - x + 15\right)$$

Die Identität zu $f_1'(x) = \frac{1}{500}(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-15)$ kann durch ausmultiplizieren der Klammern hergeleitet werden. Ein zweiter wesentlich komplizierterer Weg wäre die Berechnung der Nullstellen der Parabel 3. Grades und anschließender Linearfaktorzerlegung. Der zweite Weg ist deshalb komplizierter, weil eine Nullstelle geraten werden muss und die beiden anderen erst nach einer Polynomdivision und der Lösung einer quadratischen Gleichung feststehen.

Im Eifer des Gefechts werden aber naheliegende Lösungen gerne übersehen, deshalb führe ich an dieser Stelle auch noch mal eine Polynomdivision zur Berechnung der Nullstellen von $g(x) = x^3 - 15x^2 - x + 15$ durch: Da eine natürliche Lösung Teiler der 15 sein muss, findet man die erste Lösung x = 1 relativ schnell, Dann folgt :

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 15x^2 - x + 15) : (x-1) = x^2 - 14x - 15 \\
\underline{\pm x^3 \mp x^2} \\
\quad -14x^2 - x \\
\quad \underline{\mp 14x^2 \pm 14x} \\
\qquad -15x + 15 \\
\qquad \underline{\mp 15x \pm 15} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

und

$$x^2 - 14x - 15 = 0$$
$$x_2 = 7 + \sqrt{64} = 15$$
$$x_3 = 7 - \sqrt{64} = -1$$

Aufgabe 2.4 (5 BE)

Die maximale Länge des horizontalen Lastbandes am Ballonäquator erhält man über die Nullstelle der ersten Ableitung bei x = 15 (Kann aus der Linearfaktorzerlegung von $f'(x)$ leicht abgelesen werden. Für den Radius des Bandes gilt r = f(15) $\approx$ 9,21 m. Über die Umfangsformel des Kreises u = $2\cdot\pi\cdot r \approx 2\pi\cdot 9{,}21 \approx 57{,}87\,\text{m}$ ist die Länge des Lastbands leicht ausgerechnet

Aufgabe 2.5 (3 BE)

Das bestimmte Integral berechnet das Volumen des Rotationskörpers, der bei der Drehung des Graphen von $f_2(x)$ (analog $f_1(x)$) um die x-Achse im Intervall $[1;20]$ entsteht. Das Ergebnis von 2033,9 m^3 ist ein Näherungswert für das Volumen des Ballons. Zur Berechnung muss der Funktionsterm von $f_2(x)$ quadriert und die zugehörige Stammfunktion $F_2(x)$ gebildet werden. Anschließend verwendet man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f_2(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Nach Multiplikation mit π erhält man das gesuchte Volumen.