Aufgabe A1 Landesabitur Hessen 2011 GK

Aufgabe 1.1. (4 BE)

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz hat mit den gegebenen Daten folgende Gestalt:

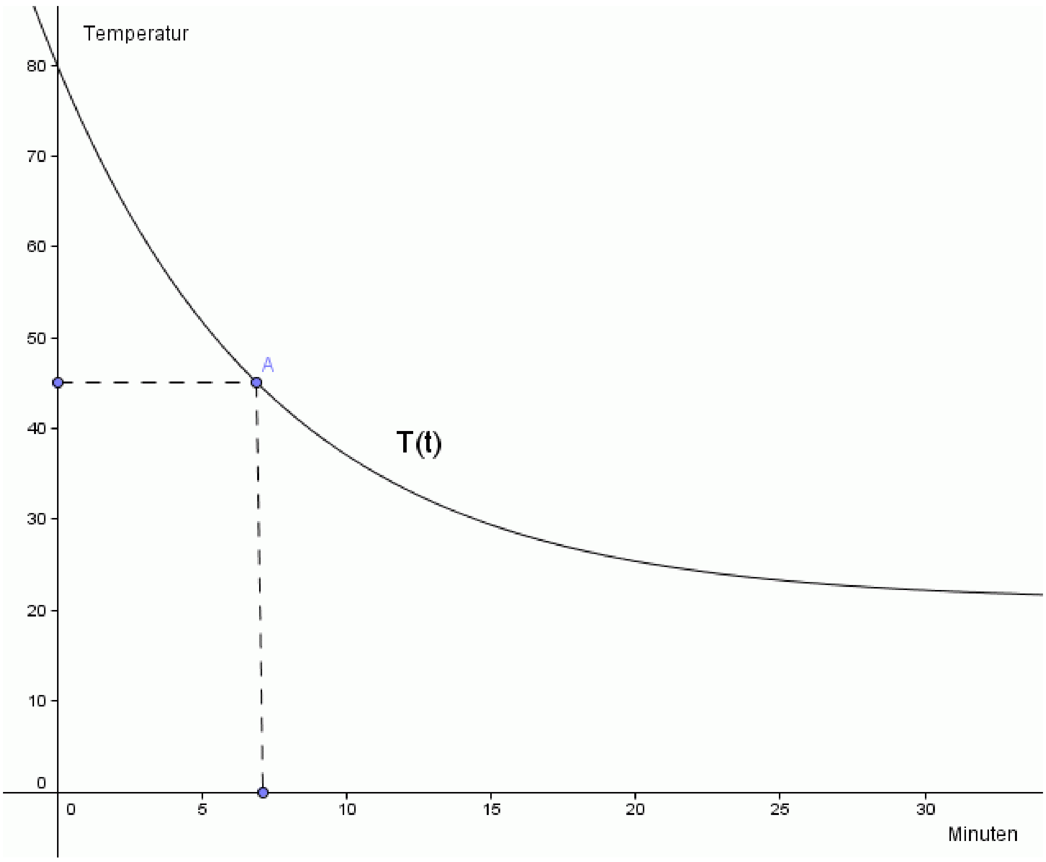
$$\begin{aligned} T(t) &= (80-21)\cdot e^{-0,13t}+21 \\ &= 59\cdot e^{-0,13t}+21 \end{aligned}$$

Zum Nachweis und zur Berechnung genügt Einsetzen in die Funktionsgleichung, d.h.

$$\begin{aligned} T(10) &= 59\cdot e^{-0,13\cdot 10}+21 \approx 37,1\,°C \\ T(2) &= 59\cdot e^{-0,13\cdot 2}+21 \approx 66,5\,°C \\ T(5) &= 59\cdot e^{-0,13\cdot 5}+21 \approx 51,8\,°C \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 . (5 BE)

Die Skizze des Graphen hat folgende Gestalt:



Daraus ergibt sich eine Zeit von ca. 7 Minuten, bis die Temperatur des Kaffees auf unter 45 ° C gesunken ist.

Aufgabe 2.1 (4 BE)

Für die folgende Aufgabe wird das Newtonsche Gesetz in der Form

$$T(t) = 59 \cdot e^{-0{,}10 \cdot t} + 21$$

verwendet.

Für welches t gilt T(t) $\leq$ 45° C ?

Die zugehörige Rechnung:

$$\begin{aligned} 59 \cdot e^{-0{,}10 \cdot t} + 21 &\leq 45 \\ 59 \cdot e^{-0{,}10 \cdot t} &\leq 24 \\ e^{-0{,}10 \cdot t} &\leq \frac{24}{59} \end{aligned}$$

liefert durch Logarithmieren auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \ln\left(e^{-0{,}10 \cdot t}\right) &\leq \ln\left(\frac{24}{59}\right) \\ -0{,}1 \cdot t \cdot \ln(e) &\leq \ln\left(\frac{24}{59}\right) \\ -0{,}1 \cdot t &\leq \ln\left(\frac{24}{59}\right) \\ t &\geq -10 \cdot \ln\left(\frac{24}{59}\right) \approx 9{,}0 \end{aligned}$$

Das Ungleichheitszeichen dreht sich um, weil durch eine negative Zahl geteilt wird.
Das Ergebnis wird positiv, da der Logarithmus einer Zahl zwischen 0 und 1 negativ ist.

Aufgabe 2.2 (4 BE)

Bei dieser Aufgabe ist t = 3 gegeben, der Abkühlungsfaktor k ist gesucht:

$$\begin{aligned} 59 \cdot e^{-k \cdot 3} + 21 &= 45 \\ 59 \cdot e^{-3k} &= 24 \\ e^{-3k} &= \frac{24}{59} \end{aligned}$$

Logarithmieren auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} -3k \cdot \ln(e) &= \ln\left(\frac{24}{59}\right) \quad \Big| :(-3) \\ k &= 0,30 \end{aligned}$$

da $\ln(e) = 1$ gilt.

Aufgabe 3.1 (8 BE)

Um die Abkühlgeschwindigkeit, also die momentane Änderung der Temperatur, zum Zeitpunkt t = 0 zu bestimmen, braucht man die erste Ableitung der Funktion T(t) aus dem Aufgabenteil 2.1 (siehe Angabe)

Nach der Kettenregel gilt:

$$T'(t) = -5,9 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

zum Zeitpunkt t = 0 folgt daraus:

$$T'(0) = -5,9 \cdot e^{0} = -5,9$$

d.h. die zu Beginn vorhandene Abnahmegeschwindigkeit beträgt $-5,9 \ \frac{°C}{min}$.

Um den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem die Abnahmegeschwindigkeit halb so groß ist wie zu Beginn , nämlich $-2,95 \ \frac{°C}{min}$ muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$-2,95 = -5,9 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

d.h.
$$0,5 = e^{-0,1 \cdot t}$$
$$-0,1 \cdot t = \ln(0,5)$$
$$t \approx 6,9$$

Nach rund 6,9 Minuten ist die Abnahmegeschwindigkeit nur noch halb so groß.

Aufgabe 3.2 (3 BE)

Zum Nachweis der Identität gilt für k = - 0,1 und T_u = 21 ° C

$$-k \cdot \left(T(t) - T_u\right) = -0,1 \cdot \left(59 \cdot e^{-0,10 \cdot t} + 21 - 21\right) = -5,9 \cdot e^{-0,1 \cdot t} = T'(t)$$

Aufgabe 3.3 (6 BE)

Um aus der Abkühlgeschwindigkeit die zugehörige Abkühlfunktion zu erhalten, muss eine Stammfunktion zur neuen Funktion A(t) ermittelt werden:

$$T(t) = \int A(t)\,dt = \int \left(-0,69 \cdot e^{-0,01 \cdot t}\right) dt = -0,69 \cdot (-100) \cdot e^{-0,01 \cdot t} + C = 69 \cdot e^{-0,01 \cdot t} + C$$

Die Konstante C muss 21sein, da die Umgebungstemperatur genau 21 °C beträgt.

Die Anfangstemperatur zum Zeitpunkt t = 0 ist also

$T(0) = 69 \cdot e^{0} + 21 = 90$, also 90 °C

Aufgabe 4 (6 BE)

$$\frac{1}{15-5}\cdot\int_5^{15} T(t)\,dt = \frac{1}{10}\cdot\int (59\cdot e^{-0,1\cdot t}+21)\,dt$$

$$= 0,1\cdot\left[-590\cdot e^{-0,1\cdot t} + 21\cdot t\right]_5^{15}$$

$$= 43,62$$

Im Sachzusammenhang beschreibt der Wert 43,62 die mittlere (durchschnittliche Temperatur) im Intervall $[5;15]$, d.h. die mittlere Temperatur für den Bereich zwischen der 5. und 15. Minute nach Beginn des Versuchs.