Abitur 2010 Mathematik GK Infinitesimalrechnung Aufgabe A1

Die Vase in Abbildung 1 kann als Rotationskörper einer um die x-Achse rotierenden Randfunktion über einem passenden Intervall aufgefasst werden. Zur automatischen Fertigung einer solchen Vase soll eine passende Randfunktion f gefunden werden (Abbildung 2).

Hierzu werden zunächst die Maße festgelegt. Die Höhe der Vase soll 12 cm betragen. Für den Bodendurchmesser sind 8 cm festgelegt; der Durchmesser der Öffnung beträgt 12 cm. In einer Höhe von 3 cm soll die Vase einen dort maximalen Durchmesser von 12 cm erhalten.

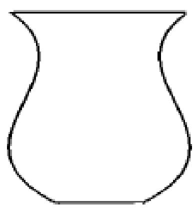


Abbildung 1

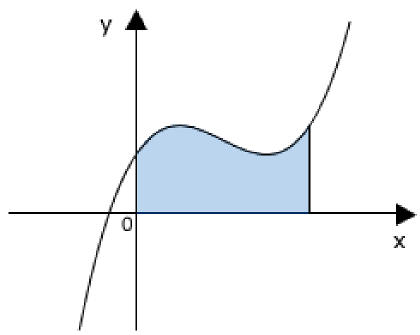
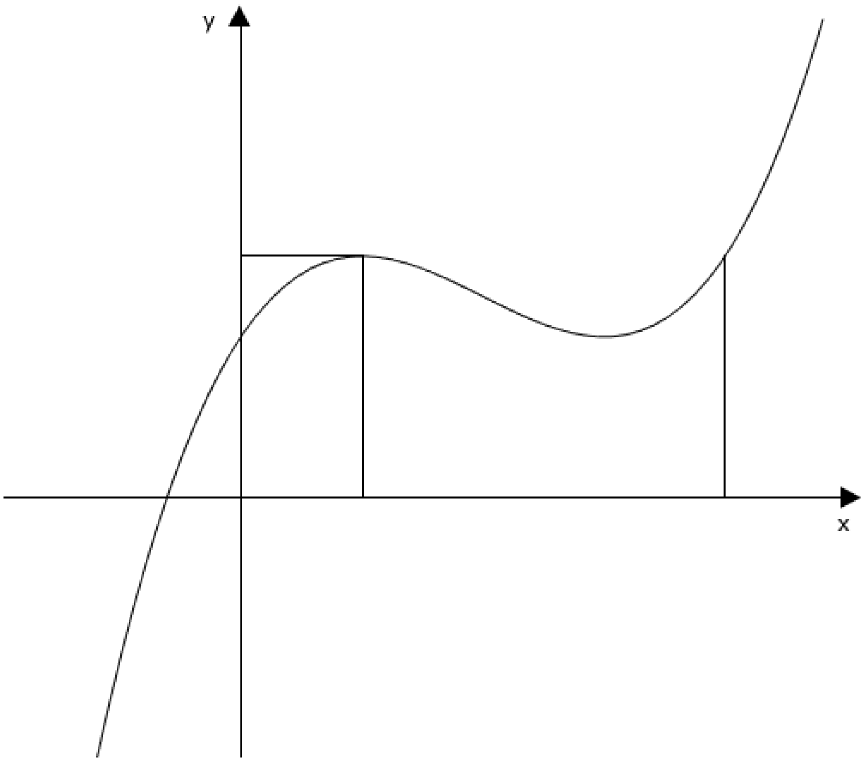


Abbildung 2

Teilaufgabe 1.1 (13 BE)

Beschriften Sie die Abbildung im Material 1 entsprechend den obigen Vorgaben.

Material 1



Teilaufgabe 1.2

Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades auf, die die genannten Bedingungen erfüllt.
Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist **nicht** erforderlich.
Als Lösung ergibt sich: $f(x) = \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 4\,.$

Teilaufgabe 1.3

Ermitteln Sie den Durchmesser, den die Vase an ihrer schmalsten Stelle oberhalb des Bodens hat.
Geben Sie an, in welcher Höhe dieser auftritt.

Teilaufgabe 2. (5 BE)

Zur Bestimmung des Volumens der Vase soll eine genaue Berechnung vorgenommen werden. Geben Sie einen mathematischen Ansatz zur Volumen Berechnung an und beschreiben Sie die erforderlichen Rechenschritte in Textform.
Die konkrete Durchführung dieser Rechenschritte ist **nicht** verlangt. Es ergibt sich ein Volumen von ca. $305,8\pi\,(\text{cm}^3)$.

Um das Volumen der Vase abzuschätzen, wird von einem Zylinder mit der Höhe $12\,\text{cm}$ und einem Radius r_m ausgegangen, wobei gilt: $r_m = \frac{1}{12}\int\limits_0^{12} f(x)\,dx$.

Teilaufgabe 3.1 (13 BE)

Berechnen Sie mit dieser Formel den Zylinderradius. Bestimmen Sie das Zylindervolumen.

Teilaufgabe 3.2

Erläutern Sie, warum mit dieser Formel ein mittlerer Radius dieser Vase bestimmt wird.

Teilaufgabe 3.3

Begründen Sie, warum der unter 3.1 errechnete Näherungswert für das Volumen zu klein ist.

Eine andere Möglichkeit zur näherungsweisen Ermittlung der Füllmenge besteht darin, diese durch das Volumen eines geeigneten Kegelstumpfes abzuschätzen. Dazu können die Radien des Vasenbodens und der Vasenöffnung verwendet werden. Als Randfunktion erhält man hier eine Gerade g (vgl. Abbildung 3).

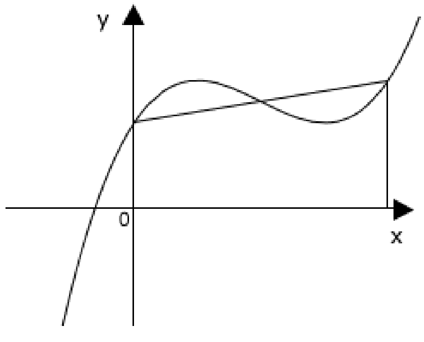


Abbildung 3

Teilaufgabe 4.1 (9 BE)

Zeichnen Sie diese Gerade g in das Koordinatensystem von Material 1 und ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g.

Teilaufgabe 4.2

Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des Kegelstumpfes, der bei der Rotation der Geraden g um die x-Achse entsteht.

Teilaufgabe 4.3

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus den Aufgabenteilen 3.1 und 4.2 hinsichtlich der Genauigkeit.