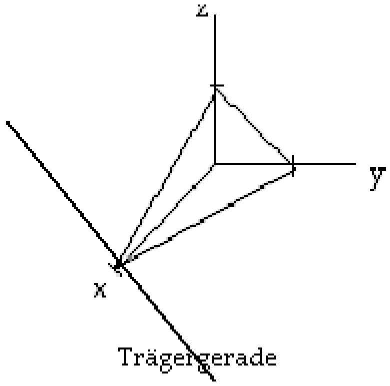
Hessen-2010-Geometrie-B1-LK

Ebenenbüschel $E_t: tx+2y+2z=3t; t\in R$

1.1. $t+2=3t \Rightarrow t=1 \Rightarrow E_1: x+2y+2z=3 \Rightarrow$

$S_x=(3|0|0); S_y=(0|1{,}5|0); S_z=(0|0|1{,}5)$



1.2. P(3|0|0) und Q(3|1|-1) sind zwei Punkte aller Ebene, weil 3t+0+0=3t und 3t+2-2=3t. Damit ist die

Gerade $\vec{x}=\overline{OP}+\lambda\overline{PQ}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Trägergerade

Die Trägergerade geht also durch den Spurpunkt S_x der Ebene E_1 und ist eine Parallele zur 2. Hauptdiagonalen z=-y der yz-Ebene.

2.1. Es müssen auch Normalenvektoren der Ebenen E_s und E_t senkrecht zueinander sein, d.h.

$\begin{pmatrix}t\\2\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}s\\2\\2\end{pmatrix}=ts+8=0 \Leftrightarrow t=-\frac{8}{s}$. Wenn s=0 gibt es natürlich kein t, also gibt es zu E_0 keine orthogonale Ebene.

2.2.

$\overrightarrow{n_0}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene E_0

$\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Trägergeraden

$$\overrightarrow{n_0}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n}=-\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ steht sowohl auf $\overrightarrow{n_0}$, als auch auf $\vec{v}$ senkrecht.

Gesuchte Ebene: $E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad E: x=3$

3.1. Sei $A=(x|y|z)$ ein Punkt, dann ist $g:\overline{x}=\overline{OA}+\lambda\overline{n^0}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ die durch A zur Ebene senkrechte Gerade mit dem normierten Normalenvektor $\overline{n^0}$. Wir setzen die Gerade in E_0 ein: $y+\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda+z+\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-y-z}{\sqrt{2}}$. Das ist der Abstand zur

Ebene. Wir berechnen nun: $\overline{OA}' = \overline{OA} + 2\lambda \overline{n^0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{-y-z}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$ Das entspricht der Matrix S. Zu (3|7|-4) ist daher der Spiegelpunkt (3|4|-7)

3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$, d.h. z und y werden vertauscht, also handelt es sich um die eine Spiegelung an der Ebene E_1 :y-z=0

3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. Es handelt sich um eine Spiegelung an der x-Achse.