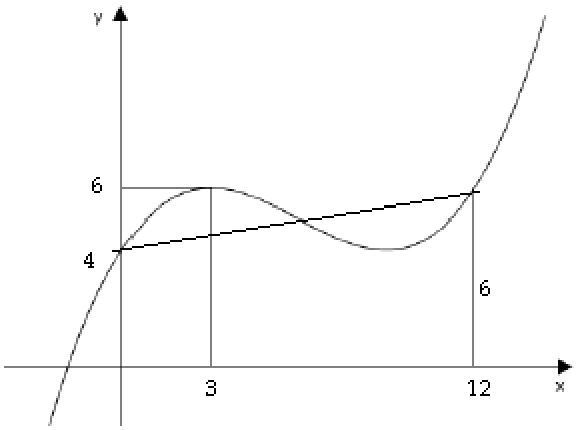
Aufgabe A1 Landesabitur Hessen 2010 GK

1.1.



1.2 . $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ➔ $f'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$

- $f(0) = a_0 = 4$
- $f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 4 = 6$
- $f(12) = 1728a_3 + 144a_2 + 12a_1 + 4 = 6$
- $f'(3) = 27a_3 + 6x + a_1 = 0$

➔ $f(x) = \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$

1.3. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{54}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$ ➔ $x = 6 \pm \sqrt{9} = 6 \pm 3$

- $f''(x) = \frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$ ➔ $f''(3) = -\frac{1}{3} < 0$, also Hochpunkt bei (3|6)
- $f''(x) = \frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$ ➔ $f''(9) = \frac{1}{3} > 0$, also Tiefpunkt bei (9|4). Also ist der minimale Durchmesser an der Höhe 9cm gleich 8cm

2. Die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion *f* und der *x*-Achse im Intervall [*a*;*b*] kann dadurch angenähert werden, dass man sie in *n* gleich breite Streifen teilt. Diese kann man als schmale Trapeze auffassen, sodass die Fläche durch
$\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x; \Delta x=\frac{b-a}{n}$ berechnet werden kann. Den Limes für $n\to\infty$ definiert man als bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$.

Das Volumen des Körper, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion *f* im Intervall [*a*;*b*] um die *x*-Achse dreht, kann man ähnlich wie die Fläche annähern, indem man den Körper in gleich breite Kreisscheiben einteilt. Man erhält dann entsprechend
$\sum_{i=1}^{n} \pi\cdot f\left(a+i\cdot\frac{\Delta x}{2}\right)^2\Delta x; \Delta x=\frac{b-a}{n}$

3. Annäherung des Rotationskörpers durch einen Zylinder mit der Höhe 12 einem mittleren Radius $r_m=\frac{1}{12}\int_0^{12} f(x)dx$

3.1. $r_m=\frac{1}{12}\int_0^{12}\left(\frac{1}{54}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+4\right)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{4\cdot 54}x^4-\frac{1}{3\cdot 3}x^3+\frac{3}{2\cdot 2}x^2+4x\right]_0^{12}=$
$=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{12^4}{4\cdot 54}-\frac{12^3}{3\cdot 3}+\frac{3\cdot 12^2}{2\cdot 2}+4\cdot 12\right)=\frac{1}{12}\cdot(96-192+108+48)=\frac{60}{12}=5$. Damit ergibt sich ein Zylindervolumen von $\pi\cdot 5^2\cdot 12=300\pi$

3.2. Die Definition für den mittleren Funktionswert in einem Intervall [*a;b*] ist
$f_m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Der Zusammenhang mit dem Mittel diskreter Wert wird deutlich, wenn man in Anlehnung an die Ausführungen bei 2. schreibt $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(x_1)\frac{b-a}{n}$

➔ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_1)$

3.3. Für das Volumen gilt in Anlehnung an 2. $V_1 = \frac{\pi \cdot (b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2$. Die Näherung durch einen Zylinder ist $V_2 = \frac{\pi}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_1)\right)^2 (b-a)$ Es gilt:

$$V_2 \le V_1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^2 (b-a) \le \frac{\pi \cdot (b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2$$

Das Quadrat einer Summe von *n* Zahlen ist immer kleiner/gleich dem *n*-Fachen der Summe der Quadrate der Zahlen!!

4.1. Die Gerade *g* hat die Steigung $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ und den *y*-Abschnitt 4;

also $y = \frac{1}{6}x + 4$

4.2. $V = \pi\int_0^{12}\left(\frac{1}{6}x+4\right)^2 dx = \pi\int_0^{12}\left(\frac{1}{36}x^2 + \frac{4}{3}x + 16\right)dx = \pi\left[\frac{1}{36\cdot 3}x^3 + \frac{4}{3\cdot 2}x^2 + 16x\right]_0^{12} = 304\pi$

4.3. 304π liegt näher bei 305π als 300π bei 3.1.