

Aufgabe C1 Landesabitur Hessen 2008 GK

1. Es handelt sich um ein binomialverteiltes Bernoulli-Experiment

- $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $p = \frac{1}{3}; n = 8; \rightarrow P(B) = P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0,2731$
- $p = \frac{2}{3}; n = 8; \rightarrow P(C) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) =$
 $= 1 - \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 - \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \approx 0,01966$

2. X sei die Zufallsvariable mit den Ausfällen $X=3$ und $X=5$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 3) = \frac{2}{3}$ und $P(X = 5) = \frac{1}{3}$. Dann ist

$$E(X) = 3 \cdot P(X = 3) + 5 \cdot P(X = 5) = 3 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = 3,6 \text{ der Erwartungswert von } X$$

3.1. Sei Y die Zufallsvariable mit den Ausfällen $Y=2$, $Y=4$ und $Y=6$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(Y = 2) = \frac{1}{2}$; $P(Y = 4) = \frac{1}{6}$ und $P(Y = 6) = \frac{1}{3}$.

$$\text{Dann ist der Erwartungswert } E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = 3,6$$

Der zweite Würfel gewinnt

- Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, wenn eine ,6' kommt
- Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$, wenn eine ,4' kommt
- Mit der Wahrscheinlichkeit 0, wenn eine ,2' kommt

Also mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$, d.h. das Spiel ist nicht fair.

3.2. Wenn man z.B. beim 2. Würfel die Augenzahlen 2,2,2,6,6,6 wählt, dann ist das Spiel fair, weil die Wahrscheinlichkeiten für Gewinn bzw. Verlust $\frac{1}{2}$ ist.

4. Prüfhypothese $H_0 : p = \frac{1}{6}$ Gegenhypothese $H_1 : p < \frac{1}{6}$

- Jeder Test mit $n=10$ und dem Ergebnis 0 muss verworfen werden
- Ob der Test mit $n=100$ und dem Ergebnis 12 zum Akzeptieren oder Verwerfen der Prüfhypothese führt, hängt von der Entscheidungsregel ab:
 - Nimmt man $\alpha=5\%$, dann ergibt sich aus $P(x \leq k) = 0,05$ mit $P(x \leq 10) = 0,043$ und $P(x \leq 11) = 0,077$ ein $k=11$. Mit $k=12$ muss die Prüfhypothese akzeptiert werden, der Würfel ist mit 95% Wahrscheinlichkeit fair.
 - Nimmt man $\alpha=20\%$, dann ergibt sich aus $P(x \leq k) = 0,2$ mit $P(x \leq 13) = 0,20$ ein $k=13$. Mit $k=12$ muss die Prüfhypothese abgelehnt werden, der Würfel ist mit 80% Wahrscheinlichkeit nicht fair.