Aufgabe B2 Landesabitur Hessen 2007 LK

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= -5 \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 &= 1 \end{aligned}$$

a. $\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ -3x_2 + (k-2)x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ (k+1)x_3 &= 0 \end{aligned}$

Das Gleichungssystem hat für k = -1 unendlich viele Lösungen und für $k \neq -1$ die Lösungen $\underline{x_3 = 0; x_2 = -1; x_1 = 1}$

Für k = -1 setzen wir ein:

(1) 5(2+*u*)+10(-2-*u*)+5(1+*u*)=10+5*u*-20-10*u*+5+5*u*=-5

(2) -3(2+*u*)-5(-2-*u*)-2(1+*u*)=-6-3*u*+10+5*u*-2-2*u*=2

(3) 2(2+*u*)+1(-2-*u*)-1(1+*u*)=4+2*u*-2-1*u*-1-*u*=1

b. Die Durchstoßpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen sind:

x=0 ➔ *u*=-1 ➔ S_x(0|0|-1); *y*=0 ➔ *u*=-1 ➔ S_y(0|0|-1); *z*=0 ➔ *u*=-1 ➔ S_z(1|-1|0)

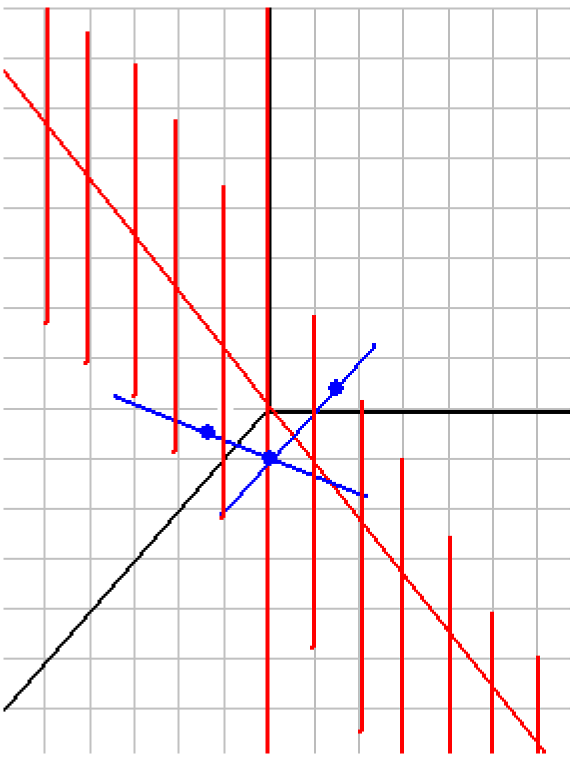
Die Ebene E: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die

Normalgleichung $\vec{x} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, also die

Koordinatengleichung x_1-x_2=0. Die Spurgeraden der Ebene sind:

(1) in der x_2x_3-Ebene
A $x_1 - x_2 = 0 \wedge x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$, also die x_3-Achse

(2) in der x_1x_2-Ebene
A $x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$, also die Hauptdiagonale



(3) in der x_1x_3-Ebene A $x_1 - x_2 = 0 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, also die x_3-Achse
Es handelt sich also um die Ebene, die senkrecht zur x_1-x_2-Ebene durch die 1. Hauptdiagonale der x_1-x_2-Ebene geht!!

c.1. Sei $P(x|y|z)$ ein Punkt des Raumes, dann ist $P'(y|x|z)$, denn $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ -(y-x) \\ 0 \end{pmatrix}$

ist parallel zum Normalenvektor und die Mitte von P und P' ist M=0,5(x+y|x+y|2z) auf

der Ebene. Das entspricht dem Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$,

z.B. S_x'(0|0|-1)= S_y'; S_z'(-1|1|0) als gespiegelte Durchstoßpunkte.

Die Gerade g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird dabei g' : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.2. Wir bilden die Gerade durch den Punkt $X(x|y|z)$ in x_1-Richtung auf die Ebene:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und setzen sie in x_1-x_2=0 ein: x+λ-y=0➔λ=y-x und erhalten den Punkt

X'=(x+y-x|y|z)= (y|y|z). Daraus ergibt sich die Abbildung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

d.1. Eine Kugel ist definiert in Koordinatenform definiert durch

(1) $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$ mit $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$

Eine Ebene ist definiert in Koordinatenform definiert durch

(2) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$

Wenn man aus (2) ein x_i isoliert und den entsprechenden Term in (1) einsetzt erhält man einen Kreis, wenn der Radius r größer ist als der Abstand von M zur Ebene. Der Lotpunkt von M in der Ebene ist der Kreismittelpunkt M'. Den Radius r' bekommt man durch $r' = \sqrt{r^2 - |MM'|^2}$.

Also:

Den Abstand $(E;M) = d$ erhalten wir aus der Geraden

$\vec{x} = \overrightarrow{OM} + d \cdot \overrightarrow{n^0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, die wir in die Ebene $x_1 - x_2 = 0$ einsetzen:

$\left(2 + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) - \left(-2 - \frac{d}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow 4 + \sqrt{2}d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{4}{\sqrt{2}}$ Da $r = 1 < |d|$ schneidet die Kugel die Ebene !

d.2. $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + d \cdot \overrightarrow{n^0} = \begin{pmatrix} 2+u \\ -2-u \\ 1+u \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in die Ebene eingesetzt:

$\left(2 + u + \frac{d}{\sqrt{2}}\right) - \left(-2 - u - \frac{d}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2u + \sqrt{2}d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{4+2u}{\sqrt{2}}$.

Wenn die Kugel die Ebene berühren soll, muss $|d| = 1$ sein , also

$\frac{4+2u}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow 4 + 2u = \sqrt{2} \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{2} - 4}{2} \approx -1{,}29$, also $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid -\frac{\sqrt{2}}{2} \mid 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$