Fachabitur 2022 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben ist die lineare Funktion $g : x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

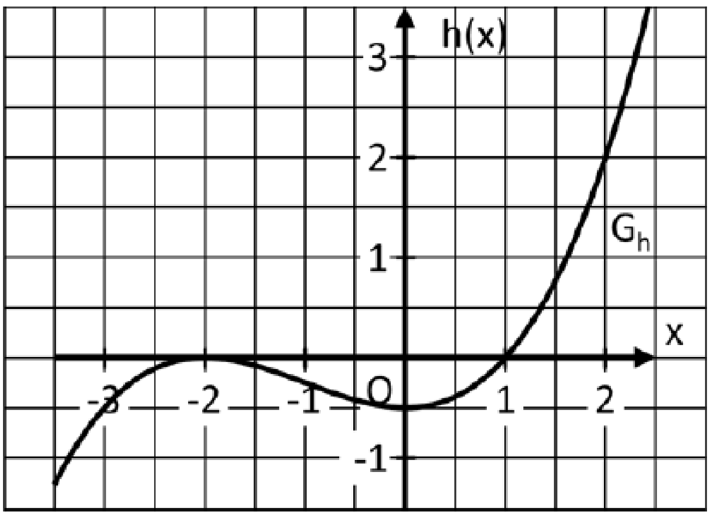
Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Berechnen Sie $\int\limits_0^2 g(x)\ \mathrm{dx}$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g.

Teilaufgabe 2. (3 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2;1[$
b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.
c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

Teilaufgabe 3. (2 BE)

Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k : x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet.

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.

Bestimmen Sie die Wertemenge von f.

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

Teilaufgabe 6. (2 BE)

Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B : t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienanzahl in einer Petrischale.

Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 7.1 (9 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an.

Teilaufgabe 7.2 (6 BE)

Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht.

Teilaufgabe 7.3 (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist.

Teilaufgabe 7.4 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u. a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $N_0 > 0$, $c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60.

Teilaufgabe 8.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N. Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0{,}301 \cdot t}$.

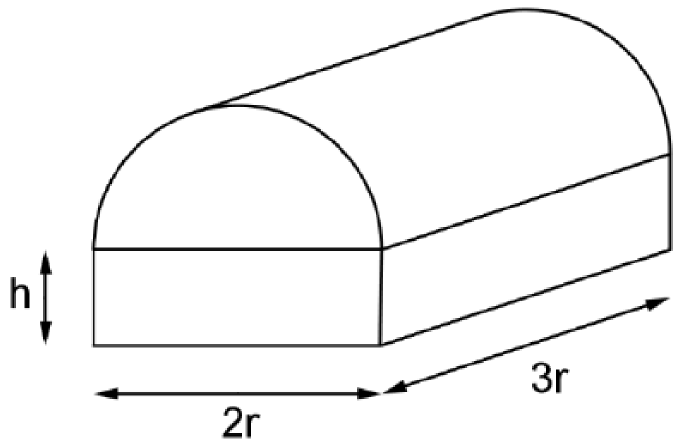
Teilaufgabe 8.2.1 (3 BE)

Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 8.1 voraussichtlich diesen Wert erreicht.

Teilaufgabe 8.2.2 (2 BE)

Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ $(b > 0)$ an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen.

Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite $2r$, die Länge $3r$ und die Höhe h (siehe Skizze).
Um möglichst ideale klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind 1000 m^2 Glas vorgesehen.
Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit vom Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V : r \mapsto V(r)$ beschreiben.
Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal 8,5 m betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens 4 m.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 9.1 (6 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders.

[Mögliche Ergebnisse: $A(r, h) = 10r\,h + 4\pi\,r^2$ und $V(r) = 600r - 0{,}9\pi\,r^3$]

Teilaufgabe 9.2 (7 BE)

Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen.
Bestimmen Sie den Radius r so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absolut größten Wert annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.