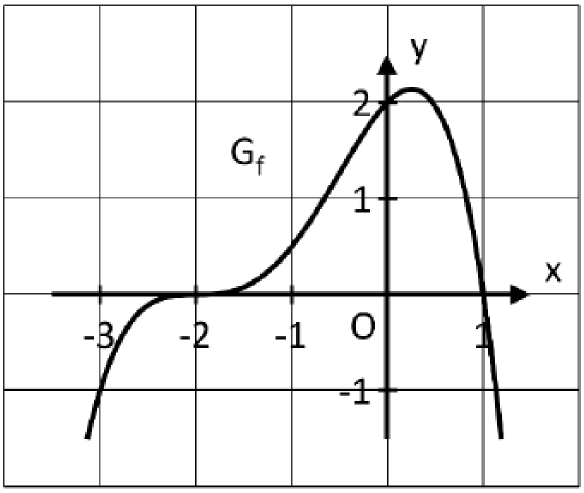
Fachabitur 2021 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind.

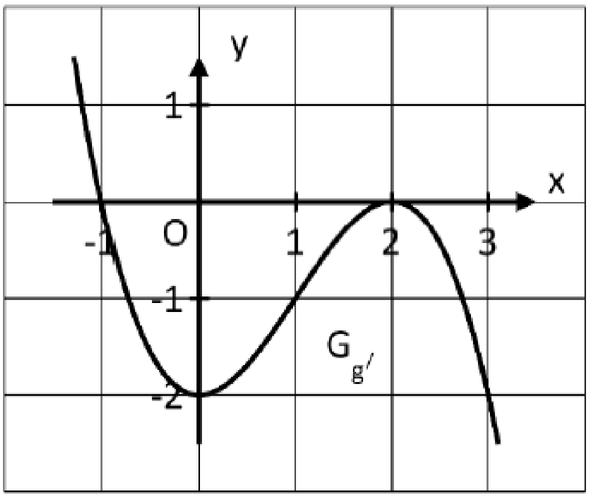
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$
b) $f''(1) < 0$
c) $f''(-2) = f'(-2)$
d) $W_f = \mathbb{R}$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8\right)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt.

g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'.
Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



Teilaufgabe 2.1 (2 BE)

Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
h(x)	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
k(x)		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden unktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5 \cdot x}$
B) $-x + 7$
C) $3^{0,5 \cdot x} + 6$
D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an.

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 - 20x^2 + 64\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [-3; 4,5]$ sowie die lineare Funktion $g : y = \frac{15}{4}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Die Graphen der Funktionen f und g in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 4.1 (2 BE)

Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
„Der Graph der Funktion f ist auf D_f achsensymmetrisch zur y-Achse.“

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe 4.3 (8 BE)

Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

Teilaufgabe 4.4 (5 BE)

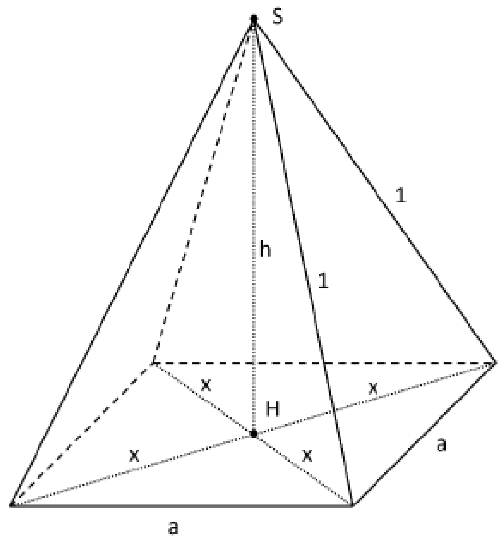
Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Gerade G_g in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 4.5 (4 BE)

Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \sqrt{19}$ (Nachweis nicht erforderlich) und schließen somit zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werkstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt:
Ein Schokodrink soll in einem Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollen aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von 1 dm haben. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt H, in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden.
Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens 0,4 dm und höchstens 0,6 dm betragen.



Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V : h \mapsto V(h)$ auf. Dabei steht h für die Höhe der Pyramide in dm und $V(h)$ für das Volumen der Pyramide in dm^3.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$]

Teilaufgabe 5.2 (7 BE)

Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h der Tetra Pak den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion M mit der Funktionsgleichung $M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von M gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in m^2 zum Zeitpunkt t an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach Ausbringung des Mittels noch 400 m^2 und nach neun Tagen nur noch 140 m^2 vermoost sind.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 6.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie a ganzzahlig und b auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 540$; $b = -0,15$

Teilaufgabe 6.2 (3 BE)

Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65% zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 6.1 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage.