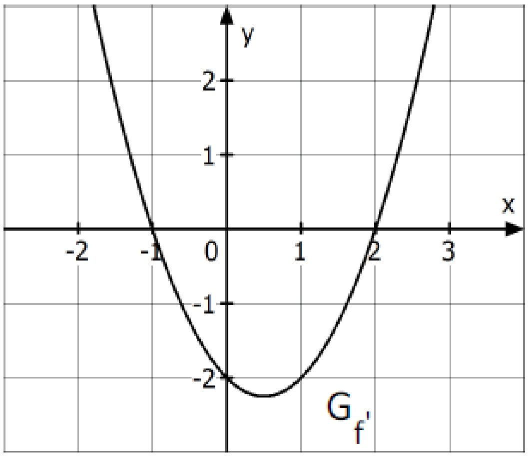
Fachabitur 2020 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Leiten Sie nachvollziehbar aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' die Lage und Art der lokalen Extremstellen von f ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von f nicht absolut sein können.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ die Lage der Wendestelle von f und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion f steigt oder fällt.

Teilaufgabe 2. (5 BE)

h sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.
Für die zugehörige erste Ableitungsfunktion gilt die Funktionsgleichung $h'(x) = x^2 + 1$.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h' und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion h genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für h an.

Im Folgenden sind zwei Gleichungen gegeben. Lösen Sie die erste und zeigen Sie die Unlösbarkeit der zweiten.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

$2x^4 - 18x^2 = 0$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

$e^{x+1} + e^{x-1} = 0$

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Eine ganzrationale Funktion g habe höchstens den Grad fünf.
Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen G_g.

$x \in$	$]-\infty; 1]$	$[1; 4]$	$[4; \infty[$
G_g	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Geben Sie die Wendestellen der Funktion g an und argumentieren Sie, welchen Grad g nur haben kann.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \left(2x^2 - 4\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_f bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von f für $|x| \to \infty$.

Teilaufgabe 5.2 (11 BE)

Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

$\left[\text{Teilergebnis: } f'(x) = \left(8x - 2x^3\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}\right]$

Teilaufgabe 5.3 (3 BE)

Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_f an der Stelle $x = 1$ in allgemeiner Form auf.

Teilaufgabe 5.4 (6 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm

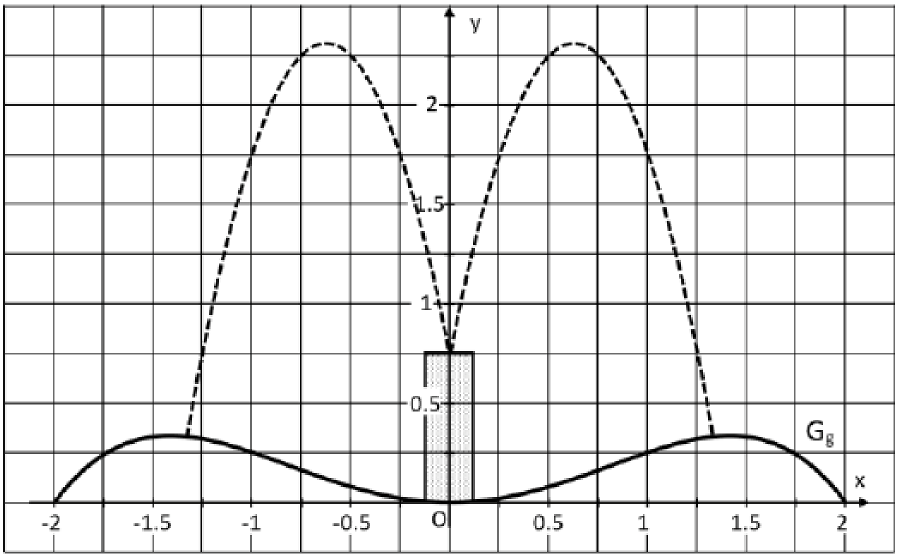
Teilaufgabe 5.5 (3 BE)

Der Graph der Ableitungsfunktion von f und die x-Achse schließen im I. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses lächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Teilaufgabe 5.6 (3 BE)

Der Graph G_f und die Koordinatenachsen schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.
Schätzen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks geeignet ab.

Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 m. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = [-2; 2]$ beschrieben. Der Graph G_g in einem kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar.
Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 6.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g. Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2\right]$$

Die Wasserfontänen treten – wie in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt – aus einer in der Mitte befindlichen Säule aus und beschreiben Parabelbahnen. Ihr Verlauf ist abhängig vom Wasserdruck.
Im Folgenden wird nur die rechte Wasserfontäne betrachtet.
Alle möglichen Wasserstrahlen lassen sich durch die Graphen der Funktionen p_a mit $p_a(x) = -a\,x^2 + 5x + 0,75$ und $a \in \mathbb{R}^+$ darstellen.

Teilaufgabe 6.2.1 (2 BE)

Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Strahl im Punkt $A(1|0,25)$ auf die Auffangwanne trifft.

Teilaufgabe 6.2.2 (6 BE)

Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe $h_{\max}$ die Auffangwanne gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.