Fachabitur 2019 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an.

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

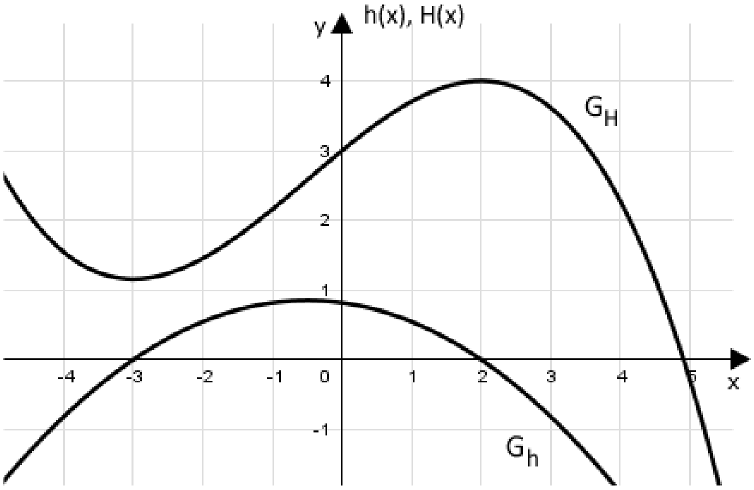
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int\limits_{-2}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}$ an.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$.

Teilaufgabe 4. (3 BE)

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt.
Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch.



Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I.	$f(0) = 0$	II.	$f'(0) = 0$
III.	$f(-3) = -3$	IV.	$f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem karteischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5.1 (2 BE)

Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat.

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$]

Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und der im Vergleich zu D_f eingeschränkten Definitionsmenge $D_g = [-4,5;1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 5.3.1 (8 BE)

Ermitteln Sie die Wertemenge W_g der Funktion g. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte.

Teilaufgabe 5.3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g.

Teilaufgabe 5.3.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 5.3.4 (3 BE)

Der Graph der Funktion g und die x-Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.
Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 6.1 (7 BE)

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t_{\max}$ die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl.

[Teilergebnis: $\dot{N}(t) = \left(4t - t^2\right) \cdot e^{-0,5t}$]

Teilaufgabe 6.2 (2 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $N(t)$ für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 6.3 (3 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 6.4 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $G : t \mapsto \left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0{,}5t}$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}_0^+$.
Zeigen Sie, dass die Funktion G eine mögliche Stammfunktion von N ist.
Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle.