

## Fachabitur 2017 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Der Graph  $G_f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  vierten Grades mit  $D_f \in \mathbb{R}$  ist symmetrisch zur  $y$ -Achse und hat einen Wendepunkt  $W_1(1|2,5)$ . Die Tangente  $G_t$  im Punkt  $W_1$  besitzt die Gleichung  $t : y = 4x - 1,5$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

### Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm  $f(x)$ .

[Mögliches Ergebnis:  $f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$ ]

### Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion  $f$  und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen  $G_f$ .

### Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $f$  sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen  $G_f$ .

### Teilaufgabe 1.4 (7 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph  $G_f$  genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordinaten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die  $x$ -Koordinaten sämtlicher Punkte von  $G_f$ , welche die gleichen  $y$ -Koordinaten wie die Wendepunkte haben.

### Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen  $G_f$  im Bereich  $-2,5 \leq x \leq 2,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem.

Für weitere Teilaufgaben wird auf der  $y$ -Achse der Bereich  $-5 \leq y \leq 5$  benötigt.

Maßstab: 1 LE = 1 cm.

### Teilaufgabe 1.6 (7 BE)

Zeigen Sie, dass an der Stelle  $x = -2$  die Gleichung  $f(x) - f'(x) = 0$  gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen  $G_f$  bedeutet.

### Teilaufgabe 1.7 (4 BE)

Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  an und zeichnen Sie den Graphen  $G_{f'}$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein.

**Teilaufgabe 1.8** (5 BE)

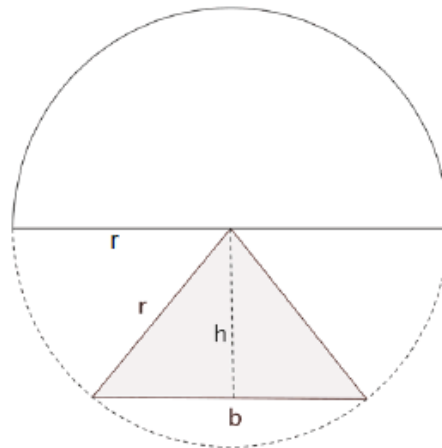
Die Graphen  $G_f$  und  $G_{f'}$  schließen ein endliches Flächenstück ein, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

**Teilaufgabe 2.** (3 BE)

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist der Graph  $G_h$  einer ganzrationalen Funktion  $h$  symmetrisch zur  $y$ -Achse, dann ist der Graph  $G_{h'}$  der ersten Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Ein Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius  $r = 12$  cm und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe  $h$  und dem Durchmesser  $b$  in der Grundfläche (siehe nebenstehende Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

**Teilaufgabe 3.1** (3 BE)

Bestimmen Sie die Maßzahl  $V(h)$  des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von  $h$ .

[Mögliches Ergebnis:  $V(h) = \frac{\pi}{3} (-h^3 + 144h)$  ]

**Teilaufgabe 3.2** (6 BE)

Aus technischen Gründen wird für die Funktion  $V : h \mapsto V(h)$  als Definitionsbereich  $D_V = [2; 8]$  gewählt.

Bestimmen Sie die Höhe  $h$  des Leuchtenfußes so, dass die Maßzahl seines Volumens den absolut größten Wert annimmt. Nach Auffassung der Designer würde dann die Leuchte die ansprechendsten Proportionen besitzen.