Fachabitur 2016 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3 + x^2 - 40x - 48\right)$ darstellen lässt.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen G_f größer ist als die berechnete Tangentensteigung.

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)

Die Parabel P ist der Graph der quadratischen Funktion p. $S(-4|4)$ ist der Hochpunkt von P und zugleich Schnittpunkt von P mit G_f. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm von p und zeichnen Sie die Parabel P im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem ein.

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$]

Teilaufgabe 1.7 (5 BE)

Die Graphen G_f und P schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

Gegeben ist die Funktionenschar $g_a : x \mapsto 0,25\,\left(x^3 - 2a\,x^2\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Ermitteln Sie die Nullstellen von g_a und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a an.

Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0,25\left(x^3 - 6x^2\right)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion $t : x \mapsto -3x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 2.2.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_3.

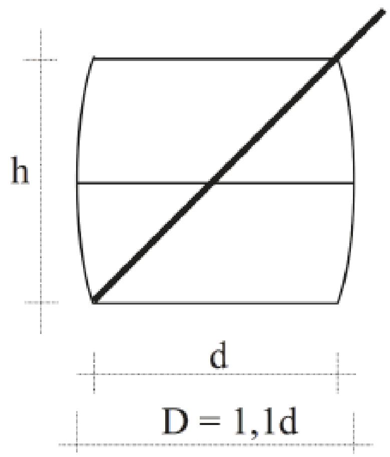
Teilaufgabe 2.2.2 (5 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion
$h : x \mapsto \begin{cases} g_3(x) & \text{für } x \leq 2 \\ t(x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ an der Nahtstelle differenzierbar ist.

Teilaufgabe 2.2.3 (2 BE)

Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion t in Bezug auf G_3.

Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(2D^2 + d^2\right)$. Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10% größer sein als d. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-h^3 + 100h\right)$]

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)

Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe h in cm und das zugehörige Volumen in cm^3 auf eine Nachkommastelle gerundet.